⑭　復習　ベクトル重要基本問題　レベルＡＢ〔解説〕

$\boxed{1}$ (1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+1\times2+0\times(-2)=3$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=45°$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-3)+5\times1+2\times2=0$

よって　$\cos\theta=0$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=90°$

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+(-1)\times\sqrt{6}+1\times(-1)=-\sqrt{6}$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{6})^2+(-1)^2}}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

$\boxed{2}$ O を原点，直線上の任意の点を $P(x,\ y)$ とし，t を実数とする。

(1)　ベクトル方程式は　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$

よって　$(x,\ y)=(0,\ 1)+t(1,\ -2)$

すなわち　$\begin{cases}x=t\\y=1-2t\end{cases}$　　t を消去すると　$y=1-2x$

(2)　ベクトル方程式は　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$

よって　$(x,\ y)=(2,\ -1)+t(-1,\ 2)$

すなわち　$\begin{cases}x=2-t\\y=-1+2t\end{cases}$　　t を消去すると　$y=-2x+3$

$\boxed{3}$ O を原点，直線 AB 上の任意の点を $P(x,\ y)$ とし，t を実数とする。

(1)　$\overrightarrow{AB}=(2-1,\ 2-3)=(1,\ -1)$

直線 AB のベクトル方程式は　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

よって　$(x,\ y)=(1,\ 3)+t(1,\ -1)$

すなわち　$\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\end{cases}$　　t を消去すると　$y=-x+4$

(2)　$\overrightarrow{AB}=(1-2,\ -1-4)=(-1,\ -5)$

直線 AB のベクトル方程式は　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

よって　$(x,\ y)=(2,\ 4)+t(-1,\ -5)$

すなわち　$\begin{cases}x=2-t\\y=4-5t\end{cases}$　　t を消去すると　$y=5x-6$

$\boxed{4}$ 直線上の任意の点を $P(x,\ y)$ とする。

(1)　$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$　……①

$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y-2)$ であるから，① より　$1\times(x-1)+(-2)\times(y-2)=0$

よって　$x-2y+3=0$

(2)　$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$　……①

$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y+1)$ であるから，① より　$3\times(x-3)+(-1)\times(y+1)=0$

よって　$3x-y-10=0$

$\boxed{5}$ (1)　$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ であるから　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

(2)　三平方の定理から　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

また，$\angle CAD=60°$ であるから，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は $60°$ である。

よって　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|\cos60°=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$

(3)　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ であるから，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{DC}$ のなす角は $0°$ である。

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{DC}|\cos0°=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times1=3$

(4)　$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$ であるから，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CG}$ のなす角は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AE}$ のなす角に等しい。

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$ であるから，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AE}$ のなす角は $90°$ である。

よって，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CG}$ のなす角は　$90°$　　ゆえに　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG}=0$

(5)　三平方の定理から　$|\overrightarrow{BG}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

また，$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AH}$ であり，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{AH}$ のなす角は $45°$ であるから，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{BG}$ のなす角も $45°$ である。

よって　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BG}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BG}|\cos45°=1\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$

(6)　$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{CA}$ であるから，(2) より

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AD}\cdot(-\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$

$\boxed{6}$ (1)　$3\vec{a}=3(1,\ -1,\ 2)=(3,\ -3,\ 6)$

大きさは　$|3\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-3)^2+6^2}=3\sqrt{6}$

(2)　$-4\vec{b}=-4(0,\ 2,\ 1)=(0,\ -8,\ -4)$

大きさは　$|-4\vec{b}|=\sqrt{0^2+(-8)^2+(-4)^2}=4\sqrt{5}$

(3)　$\vec{a}-\vec{b}=(1,\ -1,\ 2)-(0,\ 2,\ 1)=(1,\ -3,\ 1)$

大きさは　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{11}$

(4)　$2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,\ -1,\ 2)+3(0,\ 2,\ 1)=(2,\ 4,\ 7)$

大きさは　$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{2^2+4^2+7^2}=\sqrt{69}$

$\boxed{7}$ (1)　$\left(\dfrac{5\cdot3+3\cdot2}{3+5},\ \dfrac{5\cdot(-3)+3\cdot0}{3+5},\ \dfrac{5\cdot(-1)+3\cdot5}{3+5}\right)$

よって　$P\left(\dfrac{21}{8},\ -\dfrac{15}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{0+(-1)}{2},\ \dfrac{5+5}{2}\right)$　　よって　$Q\left(3,\ -\dfrac{1}{2},\ 5\right)$

(3) $\left(\dfrac{-3\cdot 3+1\cdot 2}{1-3},\ \dfrac{-3\cdot(-3)+1\cdot 0}{1-3},\ \dfrac{-3\cdot(-1)+1\cdot 5}{1-3}\right)$

よって　$\mathrm{R}\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{9}{2},\ -4\right)$

(4) $\left(\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{21}{8}+3+\dfrac{7}{2}\right),\ \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{15}{8}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2}\right),\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{4}+5-4\right)\right)$

よって　$\mathrm{G}\left(\dfrac{73}{24},\ -\dfrac{55}{24},\ \dfrac{3}{4}\right)$

$\boxed{8}$ 求める点をＰとすると，Ｐは yz 平面上の点であるから，その座標は $(0,\ y,\ z)$ とおける。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ より，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ であるから

$$(-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1^2+(y-3)^2+z^2$$

よって　$-2y-4z+14=-6y+10$　　ゆえに　$y-z=-1$　……①

$\mathrm{AP}=\mathrm{CP}$ より，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{CP}^2$ であるから

$$(-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2$$

よって　$-2y-4z+14=2y-2z+6$　　ゆえに　$2y+z=4$　……②

①，② を解くと　$y=1,\ z=2$

したがって，求める点の座標は　$(0,\ 1,\ 2)$

$\boxed{9}$ (1) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ ($s,\ t,\ u$ は実数) とおくと

$$(0,\ 3,\ 12)=s(1,\ 2,\ 3)+t(0,\ 2,\ 5)+u(1,\ 3,\ 1)$$
$$=(s+u,\ 2s+2t+3u,\ 3s+5t+u)$$

よって　$0=s+u,\quad 3=2s+2t+3u,\quad 12=3s+5t+u$

これを解いて　$s=1,\ t=2,\ u=-1$　　したがって　$\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$

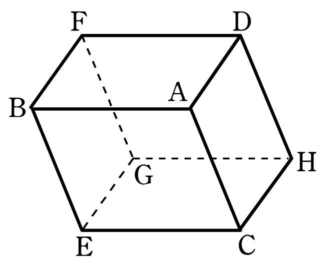
(2) $\vec{q}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ ($s,\ t,\ u$ は実数) とおくと

$$(-2,\ 2,\ 9)=s(1,\ 2,\ 3)+t(0,\ 2,\ 5)+u(1,\ 3,\ 1)$$
$$=(s+u,\ 2s+2t+3u,\ 3s+5t+u)$$

よって　$-2=s+u,\quad 2=2s+2t+3u,\quad 9=3s+5t+u$

これを解いて　$s=-2,\ t=3,\ u=0$　　したがって　$\vec{q}=-2\vec{a}+3\vec{b}$

$\boxed{10}$ 平行六面体を ABEC−DFGH とし，O を原点とする。



$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$=(-2,\ 0,\ -4)+(0,\ -4,\ 0)$
$=(-2,\ -4,\ -4)$

よって　$\mathrm{E}(-2,\ -4,\ -4)$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 2,\ 3)+(0,\ -4,\ 0)=(1,\ -2,\ 3)$

よって　$\mathrm{F}(1,\ -2,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1,\ 2,\ 3)+(-2,\ -4,\ -4)=(-1,\ -2,\ -1)$

よって　$\mathrm{G}(-1,\ -2,\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 2,\ 3)+(-1,\ 1,\ -2)=(0,\ 3,\ 1)$

よって　$\mathrm{H}(0,\ 3,\ 1)$

以上から，求める他の頂点の座標は

$$(-2,\ -4,\ -4),\ (1,\ -2,\ 3),\ (-1,\ -2,\ -1),\ (0,\ 3,\ 1)$$

$\boxed{11}$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ -2,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,\ 3,\ 1)$ であるから，3 点 O，A，B は一直線上にない。

点 C が平面 OAB 上にあるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 $s,\ t$ が存在することである。

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-1,\ -7,\ 5)$，

$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s(1,\ -2,\ 3)+t(3,\ 3,\ 1)=(s+3t,\ -2s+3t,\ 3s+t)$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$-1=s+3t$　……①，$-7=-2s+3t$　……②，$5=3s+t$　……③

①，② から　$s=2,\ t=-1$　　これは ③ を満たす。

ゆえに　$s=2,\ t=-1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される。

したがって，点 C は平面 OAB 上にある。

$\boxed{12}$ 中心が点 $(3,\ a,\ 2)$，半径が 6 の球面の方程式は

$$(x-3)^2+(y-a)^2+(z-2)^2=36$$

この球面が zx 平面 $y=0$ と交わってできる図形の方程式は

$$(x-3)^2+(z-2)^2=36-a^2,\quad y=0$$

これは zx 平面上で，中心が点 $(3,\ 0,\ 2)$，半径が $\sqrt{36-a^2}$ の円を表す。

よって　$\sqrt{36-a^2}=4$　すなわち　$a^2=20$　　ゆえに　$a=\pm 2\sqrt{5}$

⑭　復習　ベクトル重要基本問題　レベルＡＢ〔解説〕

13 (1)　$s+t=2$ の両辺を 2 で割ると　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}=1$

よって，$s'=\dfrac{s}{2}$，$t'=\dfrac{t}{2}$ とおくと，

$$s'+t'=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t'\left(2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

となる。

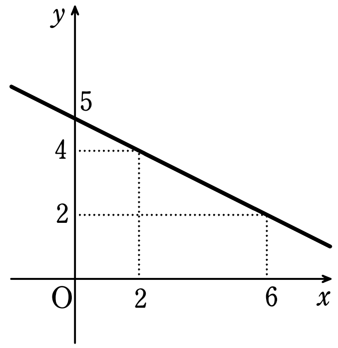
したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 A′，B′ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}},$$
$$s'+t'=1$$

ゆえに，P の存在範囲は直線 A′B′ である。

A(3, 1)，B(1, 2) であるから　A′(6, 2)，B′(2, 4)

よって，点 P の存在範囲は右の図のようになる。



(2)　$3s+4t=12$ の両辺を 12 で割ると　$\dfrac{s}{4}+\dfrac{t}{3}=1$

よって，$s'=\dfrac{s}{4}$，$t'=\dfrac{t}{3}$ とおくと，

$$s'+t'=1,\quad s'\geqq 0,\quad t'\geqq 0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\left(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t'\left(3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

となる。

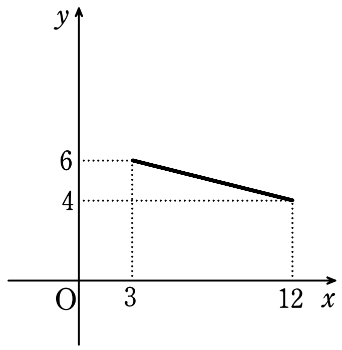
したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=4\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 A′，B′ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}},$$
$$s'+t'=1,\quad s'\geqq 0,\quad t'\geqq 0$$

ゆえに，P の存在範囲は線分 A′B′ である。

A(3, 1)，B(1, 2) であるから　A′(12, 4)，B′(3, 6)

よって，点 P の存在範囲は右の図のようになる。



(3)　$s=0$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(1\leqq t\leqq 3)$

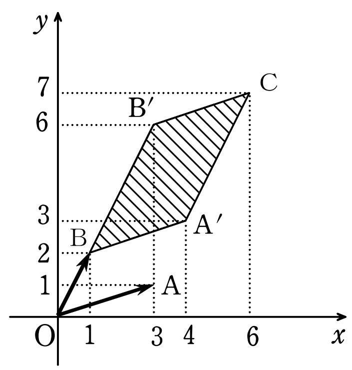
これを図示すると右の図の BB′ となる。

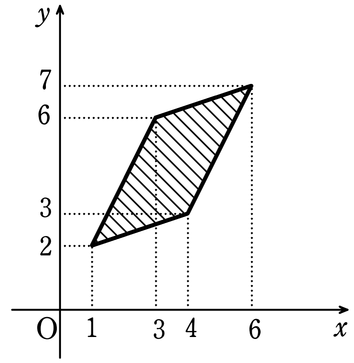
これに，$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(0\leqq s\leqq 1)$ を加えると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0\leqq s\leqq 1,\ 1\leqq t\leqq 3)$$

は右の図の平行四辺形 BB′CA′ の周および内部になる。B′(3, 6)，A′(4, 3)，C(6, 7) であるから，点 P の存在範囲は，右下の図のようになる。

ただし，境界線を含む。





(4)　$3s+2t\leqq 3$ の両辺を 3 で割ると　$s+\dfrac{2}{3}t\leqq 1$

よって，$t'=\dfrac{2}{3}t$ とおくと，

$$s+t'\leqq 1,\quad t'\geqq 0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t'\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

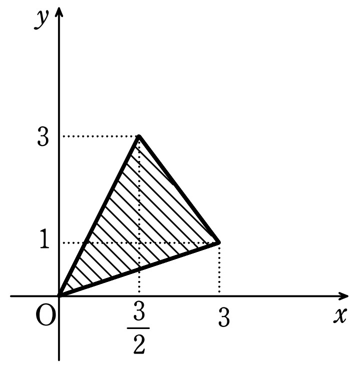
となる。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 B′ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}},$$
$$s+t'\leqq 1,\quad s\geqq 0,\quad t'\geqq 0$$

ゆえに，P の存在範囲は △OAB′ の周および内部である。

B(1, 2) であるから B′$\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$　　よって，点 P の存在範囲は上の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。



14

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2+1}=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)+\frac{2}{3}\left(\vec{b}+\vec{e}\right)=\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{2}{3}\vec{e}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\left(\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{d}+\dfrac{2}{3}\vec{e}\right)=\dfrac{3}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{d}+\dfrac{1}{2}\vec{e}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{e}-\left(\vec{b}+\vec{d}\right)=-\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{e}$$

15　球面上の任意の点を P$(\vec{p})$ とし，$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。

(1)　この球面のベクトル方程式は　$|\vec{p}|=2$

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ を $|\vec{p}|^2=2^2$ に代入すると　$x^2+y^2+z^2=4$

(2)　C$(\vec{c})$ とすると，この球面のベクトル方程式は　$|\vec{p}-\vec{c}|=3$

$\vec{p}-\vec{c}=(x-1,\ y-2,\ z-3)$ を $|\vec{p}-\vec{c}|^2=3^2$ に代入すると

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$$

(3)　この球面の半径は　　$CA=\sqrt{(5-1)^2+(-1-3)^2+\{1-(-1)\}^2}=6$

$C(\vec{c})$ とすると，この球面のベクトル方程式は　　$|\vec{p}-\vec{c}|=6$

$\vec{p}-\vec{c}=(x-1,\ y-3,\ z+1)$ を $|\vec{p}-\vec{c}|^2=6^2$ に代入すると

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=36$$

(4)　線分ABの中点Cが，この球面の中心となる。

その座標は　　$\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{2+6}{2},\ \dfrac{3-1}{2}\right)$

すなわち　　$C(1,\ 4,\ 1)$

また，この球面の半径は　　$CA=\sqrt{(-1-1)^2+(2-4)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{3}$

$C(\vec{c})$ とすると，この球面のベクトル方程式は　　$|\vec{p}-\vec{c}|=2\sqrt{3}$

$\vec{p}-\vec{c}=(x-1,\ y-4,\ z-1)$ を $|\vec{p}-\vec{c}|^2=12$ に代入すると

$$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=12$$

別解　$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ とすると，この球面のベクトル方程式は

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$\vec{p}-\vec{a}=(x+1,\ y-2,\ z-3)$，$\vec{p}-\vec{b}=(x-3,\ y-6,\ z+1)$ を ① に代入すると

$$(x+1)(x-3)+(y-2)(y-6)+(z-3)(z+1)=0$$

よって　　$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=12$

16　(1)　求める直線上の任意の点を $P(x,\ y)$ とする。

$A(2,\ -3)$ を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の方程式は

$(x,\ y)=(2,\ -3)+t(2,\ -6)$　　ただし，t は媒介変数

よって　　$x=2+2t,\ y=-3-6t$　　t を消去すると　　$3x+y-3=0$

$A(2,\ -3)$ を通り，$\vec{d}$ に垂直な直線については，$\overrightarrow{AP}\perp\vec{d}$ から　　$\vec{d}\cdot\overrightarrow{AP}=0$　……①

$\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y+3)$ であるから，① より　　$2\times(x-2)+(-6)\times(y+3)=0$

よって　　$x-3y-11=0$

(2)　求める円上の点を $P(x,\ y)$ とすると

$|\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{BC}|$　よって　$|\overrightarrow{BP}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$

$\overrightarrow{BP}=(x+2,\ y-1)$，$\overrightarrow{BC}=(3,\ -4)$ であるから

$$(x+2)^2+(y-1)^2=3^2+(-4)^2$$

よって　$(x+2)^2+(y-1)^2=25$

17　Oの座標は　$(0,\ 0,\ 0)$

Aは x 軸上にあるから，Aの y 座標と z 座標は0

x 座標は，点Pの x 座標と等しいから2　　よって $A(2,\ 0,\ 0)$

Bは xy 平面上にあるから z 座標は0

x 座標，y 座標は点Pの x 座標，y 座標と等しいから　$x=2,\ y=4$

よって，$B(2,\ 4,\ 0)$

以下同様にして

Cの座標は　$(0,\ 4,\ 0)$，　Rの座標は　$(0,\ 0,\ 3)$，　Sの座標は　$(2,\ 0,\ 3)$，

Qの座標は　$(0,\ 4,\ 3)$

18　(1)　$OA=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$

(2)　$AB=\sqrt{(3-1)^2+\{2-(-2)\}^2+(-2-3)^2}=3\sqrt{5}$

19　(1)　$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}=\vec{e}+(-\vec{b})=-\vec{b}+\vec{e}$

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}=\vec{b}+\vec{e}$

よって　　$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DG}=(-\vec{b}+\vec{e})+(\vec{b}+\vec{e})=2\vec{e}$

(2)　$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=-\vec{d}+\vec{b}+\vec{e}=\vec{b}-\vec{d}+\vec{e}$

$\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FB}=(-\vec{d})+(-\vec{e})=-\vec{d}-\vec{e}$

よって　　$\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{GB}=(\vec{b}-\vec{d}+\vec{e})+(-\vec{d}-\vec{e})=\vec{b}-2\vec{d}$

20　$2\vec{a}-\vec{b}=2(x,\ 12,\ 1)-(-1,\ y,\ z)=(2x+1,\ 24-y,\ 2-z)$

$2\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$ から　$2x+1=0,\ 24-y=0,\ 2-z=0$

よって　$x=-\dfrac{1}{2},\ y=24,\ z=2$

21　(1)　$\overrightarrow{AB}=(3,\ -3,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,\ -5,\ -2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,\ -2,\ -3)$，

$\overrightarrow{BD}=(-1,\ 5,\ 2)$，$\overrightarrow{CD}=(1,\ 7,\ 5)$

よって　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$　$(\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB})$

ACとDBは一直線上にないから，四角形ACBDは，平行四辺形である。

(2)　$\vec{a}/\!/\vec{b}$ のとき，$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在する。

$\vec{b}=k\vec{a}$　から　$(x+1,\ 2x,\ y)=k(2,\ 3,\ 4)$

よって　$x+1=2k$ ……①，　$2x=3k$ ……②，　$y=4k$ ……③

①×2 に ② を代入すると　$3k+2=4k$　　よって　$k=2$

② から　$x=3$　　③ から　$y=8$

22　(1)　$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)+t(3,\ 4,\ 5)=(1+3t,\ 1+4t,\ 1+5t)$

よって　$|\vec{x}|^2=(1+3t)^2+(1+4t)^2+(1+5t)^2$

$$=50t^2+24t+3$$

$$=50\left\{t^2+\frac{12}{25}t+\left(\frac{6}{25}\right)^2\right\}-50\cdot\left(\frac{6}{25}\right)^2+3$$

$$=50\left(t+\frac{6}{25}\right)^2+\frac{3}{25}$$

ゆえに，$|\vec{x}|^2$ は　$t=-\dfrac{6}{25}$ のとき最小となる。

$|\vec{x}| \geqq 0$ であるから，$|\vec{x}|$ も $t=-\frac{6}{25}$ のとき最小となる。

このとき　$\vec{x}=\left(1+3\cdot\left(-\frac{6}{25}\right),\ 1+4\cdot\left(-\frac{6}{25}\right),\ 1+5\cdot\left(-\frac{6}{25}\right)\right)$

$=\left(\frac{7}{25},\ \frac{1}{25},\ -\frac{1}{5}\right)$

(2)　$\vec{x_0}\cdot\vec{b}=\frac{7}{25}\times 3+\frac{1}{25}\times 4+\left(-\frac{1}{5}\right)\times 5=\frac{21}{25}+\frac{4}{25}-1=0$

よって　$\vec{x_0}\perp\vec{b}$

23 $\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{c}$ と $\vec{b}$ のなす角が等しいから，$\vec{c}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ $(k\fallingdotseq 0)$ と表される。

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$，$|\vec{b}|=\sqrt{4^2+1^2+8^2}=9$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ であるから

$\vec{a}+t\vec{b}=k\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{9}\right)$

よって　$(2,\ -1,\ 2)+t(4,\ 1,\ 8)=k\left\{\frac{1}{3}(2,\ -1,\ 2)+\frac{1}{9}(4,\ 1,\ 8)\right\}$

$(2+4t,\ -1+t,\ 2+8t)=k\left(\frac{10}{9},\ -\frac{2}{9},\ \frac{14}{9}\right)$

ゆえに　$2+4t=\frac{10}{9}k$，$-1+t=-\frac{2}{9}k$，$2+8t=\frac{14}{9}k$

これを解いて　　$t=\frac{1}{3}$，$k=3$

このとき　$\vec{c}=\left(2+4\cdot\frac{1}{3},\ -1+\frac{1}{3},\ 2+8\cdot\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{14}{3}\right)$

別解　$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ -1,\ 2)+t(4,\ 1,\ 8)=(2+4t,\ -1+t,\ 2+8t)$

$\vec{c}$ と $\vec{a}$，$\vec{c}$ と $\vec{b}$ のなす角が等しいから

$\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{c}||\vec{b}|}$　　よって　$|\vec{b}|\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\vec{c}\cdot\vec{b}$

ゆえに　$9\{2(2+4t)-(-1+t)+2(2+8t)\}=3\{4(2+4t)+(-1+t)+8(2+8t)\}$

$3(9+23t)=23+81t$　　　よって　$t=\frac{1}{3}$

このとき　$\vec{c}=\left(2+4\cdot\frac{1}{3},\ -1+\frac{1}{3},\ 2+8\cdot\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{14}{3}\right)$

24 点 P，Q，R の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とする。

(1)　$\vec{p}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(2)　$\vec{q}=\frac{-2\vec{d}+3\vec{p}}{3-2}=-2\vec{d}+3\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=2\vec{b}+\vec{c}-2\vec{d}$

(3)　$\vec{r}=\frac{\vec{a}+\vec{q}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}(2\vec{b}+\vec{c}-2\vec{d})=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{d}$

25 (1)　$\overrightarrow{AB}=(2,\ 4,\ 1)-(-1,\ -2,\ 4)=(3,\ 6,\ -3)=3(1,\ 2,\ -1)$

$\overrightarrow{AC}=(0,\ 0,\ 3)-(-1,\ -2,\ 4)=(1,\ 2,\ -1)$

よって　$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$

したがって，3 点 A，B，C は一直線上にある。

(2)　3 点 A，B，C が一直線上にあるための必要十分条件は，$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 k が存在することである。

$\overrightarrow{AB}=(4,\ b,\ -7)-(a,\ -1,\ 5)=(4-a,\ b+1,\ -12)$

$\overrightarrow{AC}=(5,\ 5,\ -13)-(a,\ -1,\ 5)=(5-a,\ 6,\ -18)$

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ から　　$4-a=k(5-a)$，$b+1=6k$，$-12=-18k$

これを解いて　　$k=\frac{2}{3}$，$a=2$，$b=3$

26 O を原点とし，直線上の任意の点を P$(x,\ y,\ z)$ とすると，直線のベクトル方程式は

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$　(t は実数)

で表される。

(1)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ -1)+t(2,\ 3,\ 1)=(1+2t,\ 1+3t,\ -1+t)$

よって　　$x=1+2t$，$y=1+3t$，$z=-1+t$

(2)　$(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 1)+t(0,\ 2,\ 1)=(3,\ 2+2t,\ 1+t)$

よって　　$x=3$，$y=2+2t$，$z=1+t$

27 O を原点とし，直線上の任意の点を P$(x,\ y,\ z)$ とすると，直線のベクトル方程式は

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　(t は実数)

で表される。

(1)　$(x,\ y,\ z)=(1-t)(-2,\ 1,\ -1)+t(1,\ 3,\ 2)=(-2+3t,\ 1+2t,\ -1+3t)$

よって　　$x=-2+3t$，$y=1+2t$，$z=-1+3t$

別解　点 A を通り，$\overrightarrow{AB}=(3,\ 2,\ 3)$ に平行な直線のベクトル方程式は

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$　(t は実数)

ゆえに　　$(x,\ y,\ z)=(-2,\ 1,\ -1)+t(3,\ 2,\ 3)=(-2+3t,\ 1+2t,\ -1+3t)$

よって　　$x=-2+3t$，$y=1+2t$，$z=-1+3t$

(2)　$(x,\ y,\ z)=(1-t)(-1,\ -3,\ 1)+t(2,\ -3,\ 3)=(-1+3t,\ -3,\ 1+2t)$

よって　　$x=-1+3t$，$y=-3$，$z=1+2t$

別解　点 A を通り，$\overrightarrow{AB}=(3,\ 0,\ 2)$ に平行な直線のベクトル方程式は

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$　(t は実数)

ゆえに　　$(x,\ y,\ z)=(-1,\ -3,\ 1)+t(3,\ 0,\ 2)=(-1+3t,\ -3,\ 1+2t)$

よって　　$x=-1+3t$，$y=-3$，$z=1+2t$

$\boxed{28}$ (1)　$AP^2=(p-1)^2+(q-2)^2+(0-3)^2$

$BP^2=(p+1)^2+(q-3)^2+(0-5)^2$

$AP=BP$　から　$AP^2=BP^2$

したがって　$(p-1)^2+(q-2)^2+(0-3)^2=(p+1)^2+(q-3)^2+(0-5)^2$

よって　$4p-2q+21=0$

(2)　(1) から　$q=2p+\dfrac{21}{2}$

ゆえに　$OP^2=p^2+q^2=p^2+\left(2p+\dfrac{21}{2}\right)^2=5\left(p+\dfrac{21}{5}\right)^2+\dfrac{441}{20}$

$OP\geqq 0$ であるから　$p=-\dfrac{21}{5}$ のとき OP は最小となる。

このとき　$q=\dfrac{21}{10}$　　ゆえに　$P\left(-\dfrac{21}{5},\ \dfrac{21}{10},\ 0\right)$

$\boxed{29}$ (1)　$\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ とすると

$(0,\ 8,\ -3)=p(1,\ 2,\ 3)+q(0,\ -1,\ 2)+r(-2,\ 1,\ -3)$

ゆえに　$(0,\ 8,\ -3)=(p-2r,\ 2p-q+r,\ 3p+2q-3r)$

よって　$0=p-2r,\ 8=2p-q+r,\ -3=3p+2q-3r$

これを解いて　$p=2,\ q=-3,\ r=1$

したがって　$\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

(2)　$\vec{x}=(1,\ 2-t,\ 3+2t)$ から

$|\vec{x}|^2=1^2+(2-t)^2+(3+2t)^2=5t^2+8t+14=5\left(t+\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{54}{5}$

$|\vec{x}|\geqq 0$ であるから　$t=-\dfrac{4}{5}$ のとき，$|\vec{x}|$ は最小となる。

このとき　$\vec{x}=\left(1,\ 2+\dfrac{4}{5},\ 3+2\cdot\dfrac{-4}{5}\right)=\left(1,\ \dfrac{14}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$

$\boxed{30}$ $|\overrightarrow{OP}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+36=0$　から　$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2+36=0$

$|\overrightarrow{OA}|^2=5^2+4^2+(-2)^2=45$　であるから

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2-45+36=0$　よって　$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|^2=9$

ゆえに　$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=3$　すなわち　$|\overrightarrow{AP}|=3$

したがって，点 P の集合は，点 A を中心とし，半径 3 の球面を表す。

また，$|\overrightarrow{AP}|^2=9$ から，求める方程式は　$(x-5)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=9$

$\boxed{31}$ 直線 $3x+2y-6=0$ の法線ベクトルを $\vec{m}$ とすると　$\vec{m}=(3,\ 2)$

条件より，$\vec{m}\perp\vec{d}$ であるから　$\vec{m}\cdot\vec{d}=0$

よって　$3\times a+2\times 3=0$　　ゆえに　$a=-2$

また，$\vec{m}/\!/\vec{n}$ であるから，$\vec{n}=k\vec{m}$ を満たす実数 k がある。

よって　$3=3k,\ b=2k$　　これを解いて　$k=1,\ b=2$

次に，直線 $cx+2y-1=0$ の法線ベクトルを $\vec{m'}$ とすると　$\vec{m'}=(c,\ 2)$

直線 $3x+2y-6=0$ は，直線 $cx+2y-1=0$ と垂直に交わるから，$\vec{m}$ と $\vec{m'}$ は垂直である。

よって　$\vec{m}\cdot\vec{m'}=0$　すなわち　$3\times c+2\times 2=0$　　したがって　$c=-\dfrac{4}{3}$

$\boxed{32}$ (1)　直線上の任意の点を $P(x,\ y)$ とする。

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{CA}$ であるから　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$　…… ①

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-4,\ y+2),\ \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(3,\ -4)$ であるから，① に代入すると　$(x-4)\times 3+(y+2)\times(-4)=0$

よって　$3x-4y-20=0$

(2)　直線上の任意の点を $P(x,\ y)$ とし，原点 O から直線に下ろした垂線と直線の交点を A とする。

このとき，$\overrightarrow{OA}/\!/\vec{n}$ となるから，$\overrightarrow{OA}=k\vec{n}$ を満たす実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{OA}=(-k,\ \sqrt{3}k)$

$|\overrightarrow{OA}|=2$ であるから　$|\overrightarrow{OA}|^2=2^2$

よって　$k^2+3k^2=4$　　したがって　$k=\pm 1$

ゆえに　$\overrightarrow{OA}=(-1,\ \sqrt{3}),\ (1,\ -\sqrt{3})$

また，$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ であるから　$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$　…… ①

$\overrightarrow{OA}=(-1,\ \sqrt{3})$ のとき　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x+1,\ y-\sqrt{3})$

これを ① に代入すると　$(x+1)\times(-1)+(y-\sqrt{3})\times\sqrt{3}=0$

よって　$x-\sqrt{3}y+4=0$

$\overrightarrow{OA}=(1,\ -\sqrt{3})$ のとき　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-1,\ y+\sqrt{3})$

これを ① に代入すると　$(x-1)\times(-1)+(y+\sqrt{3})\times\sqrt{3}=0$

よって　$x-\sqrt{3}y-4=0$

(3)　円上の任意の点を $P(x,\ y)$ とする。

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$ から　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$　…… ①

$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y-4),\ \overrightarrow{BP}=(x-3,\ y)$ であるから，① に代入すると

$(x-1)(x-3)+(y-4)y=0$

よって　$(x-2)^2+(y-2)^2=5$