1 (1)　AB＝8 であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行な単位ベクトルは　$\dfrac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ -\dfrac{1}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

すなわち　$\dfrac{1}{8}\vec{b},\ -\dfrac{1}{8}\vec{b}$

(2)　三平方の定理から　$\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と平行な単位ベクトルは　$\dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ -\dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}-\vec{b}$ であるから，求めるベクトルは　$\dfrac{1}{10}(\vec{c}-\vec{b}),\ -\dfrac{1}{10}(\vec{c}-\vec{b})$

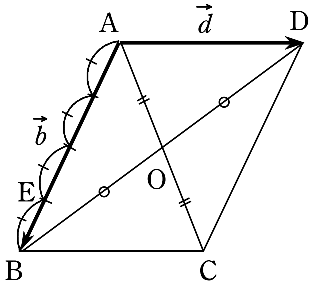
2 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$=-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{d}\right)+\vec{b}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{d}\right)+\dfrac{3}{4}\vec{b}=\dfrac{1}{4}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{d}$



3 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2(3\vec{b}-2\vec{a}),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\vec{b}-2\vec{a}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$　　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\vec{a}-(3\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$　　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

4 (1)　$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$ ……①，　$\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ ……②　とする。

①＋② から　$3\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$　　よって　$\vec{x}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

このとき，① から　$\vec{y}=\vec{a}-2\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$

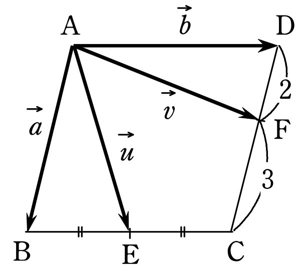
(2)　$2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}$ ……①，　$\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$ ……②　とする。

①＋②×3 から　$5\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})+3(\vec{a}-\vec{b})=4\vec{a}-2\vec{b}$

よって　$\vec{x}=\dfrac{4}{5}\vec{a}-\dfrac{2}{5}\vec{b}$

このとき，② から　$\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\left(\dfrac{4}{5}\vec{a}-\dfrac{2}{5}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{5}\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$

5　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$



よって　$\vec{u}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ ……①

また　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって　$\vec{v}=\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{a}$ ……②

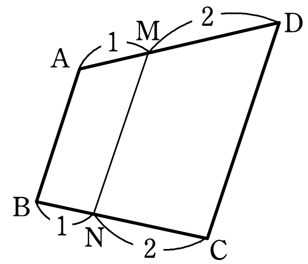
② から　$\vec{b}=\vec{v}-\dfrac{2}{5}\vec{a}$ ……③

これを ① に代入して　$\vec{u}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\left(\vec{v}-\dfrac{2}{5}\vec{a}\right)$　　よって　$\vec{a}=\dfrac{5}{4}\vec{u}-\dfrac{5}{8}\vec{v}$

これを ③ に代入して　$\vec{b}=\vec{v}-\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{5}{4}\vec{u}-\dfrac{5}{8}\vec{v}\right)$　　よって　$\vec{b}=-\dfrac{1}{2}\vec{u}+\dfrac{5}{4}\vec{v}$

6 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BN}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ……①



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{0}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

よって，① から

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\dfrac{1}{3}(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}})+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ……②

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ の向きは同じであるから，k を正の定数として $\overrightarrow{\mathrm{DC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表される。

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2+k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　すなわち　$\mathrm{MN}\parallel\mathrm{AB}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ の向きは同じであるから，② により

$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=\left|\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right|=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|$

ゆえに　$3|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|+|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|$

すなわち　$3\mathrm{MN}=2\mathrm{AB}+\mathrm{CD}$

7 （$\Longrightarrow$ の証明）

四角形ABCDが平行四辺形のとき

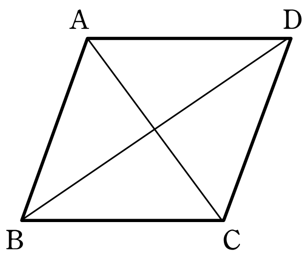
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$

よって　$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+2\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AA}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}$



（$\Longleftarrow$ の証明）

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$ を変形して　$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$

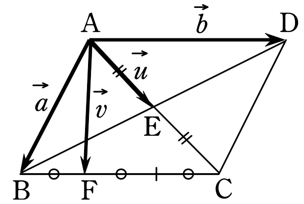
よって　$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$　　ゆえに　$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

したがって，四角形ABCDは平行四辺形である。

8 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

であるから

$\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ …… ①，　$\vec{v}=\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ …… ②



② から　$\vec{a}=\vec{v}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$ …… ③

① に代入して　$\vec{u}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{v}-\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　ゆえに　$\vec{b}=3\vec{u}-\dfrac{3}{2}\vec{v}$

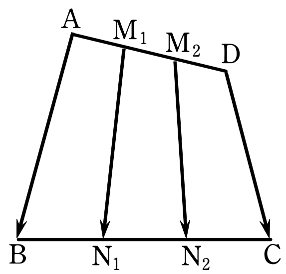
③ に代入して　$\vec{a}=\vec{v}-\dfrac{1}{3}\left(3\vec{u}-\dfrac{3}{2}\vec{v}\right)$　　ゆえに　$\vec{a}=-\vec{u}+\dfrac{3}{2}\vec{v}$

以上から　$\vec{a}=-\vec{u}+\dfrac{3}{2}\vec{v}$，$\vec{b}=3\vec{u}-\dfrac{3}{2}\vec{v}$

9 (1)　$\overrightarrow{M_1N_1}=\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN_1}$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ であるから

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

ゆえに　$\overrightarrow{M_1N_1}=\dfrac{1}{3}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{AB}$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

(2)　$\overrightarrow{M_1N_1}+\overrightarrow{M_2N_2}=(\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN_1})+(\overrightarrow{M_2D}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN_2})$

$=(\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{M_2D})+(\overrightarrow{BN_1}+\overrightarrow{CN_2})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

別解　(2)　(1) と同様にして　$\overrightarrow{M_2N_2}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}$