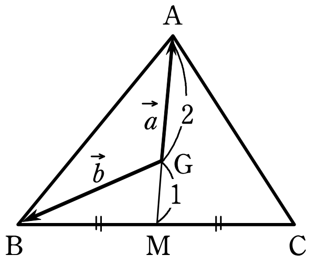
1 (1)　G は △ABC の重心であるから　AG : GM＝2 : 1



よって　$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{2}\vec{a}$

また，G を始点とする位置ベクトルを考えると

$$\overrightarrow{GG}=\frac{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}{3}$$

よって　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ゆえに　$\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$

(2)　(1) から　$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\vec{a}-(-\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

また　$\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\vec{a}$

求める直線は，点 M を通り，$\overrightarrow{CA}$ を方向ベクトルとする直線であるから，そのベクトル方程式は　$\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GM}+t\overrightarrow{CA}$　(t は実数)

よって　$\vec{p}=-\frac{1}{2}\vec{a}+t(2\vec{a}+\vec{b})$

すなわち　$\vec{p}=\left(2t-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数)

2 (1)　2 直線 ℓ，m の媒介変数表示は

$$\ell : \begin{cases} x=s \\ y=3+2s \end{cases} \qquad m : \begin{cases} x=6-2t \\ y=1+3t \end{cases}$$

交点では，2 直線 ℓ，m の媒介変数表示で表されている x の値，y の値がそれぞれ等しくなるから　$s=6-2t$，$3+2s=1+3t$

これを解いて　$s=2$，$t=2$

ゆえに，ℓ と m の交点の座標は　(2，7)

(2)　点 Q は直線 ℓ 上の点であるから，点 Q の座標を，Q(s，$3+2s$) とおくと

$$\overrightarrow{PQ}=(s-4,\ 2+2s)$$

直線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{d}$ とすると，$\ell \perp$PQ から　$\vec{d}\perp\overrightarrow{PQ}$

ゆえに　$\vec{d}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

$\vec{d}=(1,\ 2)$ であるから　$1\cdot(s-4)+2\cdot(2+2s)=0$

ゆえに　$s=0$

したがって，点 Q の座標は　(0，3)

別解　$\vec{0}$ でないベクトル $(a,\ b)$ に垂直なベクトルの 1 つは $(b,\ -a)$ である。

ゆえに，$\vec{n_1}=(2,\ -1)$ とすると，$\vec{n_1}$ は直線 ℓ の法線ベクトルである。

よって，直線 PQ は点 P(4，1) を通り，$\vec{n_1}=(2,\ -1)$ が方向ベクトルである直線である。

ゆえに，直線 PQ のベクトル方程式は

$$(x,\ y)=(4,\ 1)+u(2,\ -1)\quad (u \text{ は媒介変数})$$

この直線と ℓ の交点が Q である。

直線 PQ の媒介変数表示は　$\begin{cases} x=4+2u \\ y=1-u \end{cases}$

交点では，2 直線 PQ，ℓ の媒介変数表示で表されている x の値，y の値がそれぞれ等しくなるから　$s=4+2u$，$3+2s=1-u$

これを解いて　$s=0$，$u=-2$

したがって，点 Q の座標は　(0，3)

3 (1)　$s+t=3$ の両辺を 3 で割ると　$\frac{s}{3}+\frac{t}{3}=1$

よって，$\frac{s}{3}=s'$，$\frac{t}{3}=t'$ とおくと

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\frac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})=s'(3\overrightarrow{OA})+t'(3\overrightarrow{OB})$

となる。したがって，$\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$ を満たす点 A′，B′ をとると

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

ゆえに，P の存在範囲は　線分 A′B′

(2)　$s+t\leqq 3$ の両辺を 3 で割ると　$\frac{s}{3}+\frac{t}{3}\leqq 1$

よって，$\frac{s}{3}=s'$，$\frac{t}{3}=t'$ とおくと

$s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s'(3\overrightarrow{OA})+t'(3\overrightarrow{OB})$

となる。したがって，$\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$ を満たす点 A′，B′ をとると

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$，$s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

ゆえに，P の存在範囲は　△OA′B′ の周および内部

4 (1)　t を固定して $t=k$ (定数) とすると　$1\leqq k\leqq 3$

$\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$ を満たす点 B′ をとると

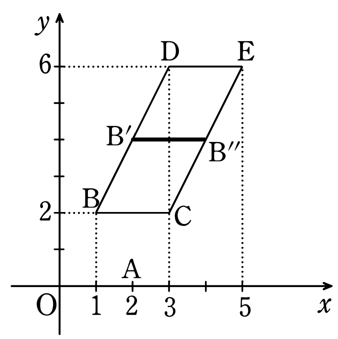
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}$

よって　$\overrightarrow{B'P}=s\overrightarrow{OA}=(2s,\ 0)$

$0\leqq s\leqq 1$ で s が変化すると，P は右の図のような

B′B″＝2，B′B″∥OA

である線分 B′B″ 上を動く。更に，k を $1\leqq k\leqq 3$ で変化させると，線分 B′B″ が図の線分 BC から線分 DE まで，x 軸に平行に動く。



［図］境界線を含む。

(2)　$s+t=k$ (定数) とおくと　$1\leqq k\leqq 3$

$s+t=k$ の両辺を k で割ると　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

よって，$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと

$$s'+t'=1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

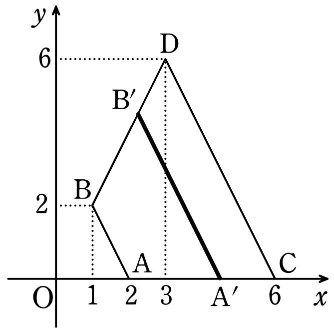
となる。したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 A′，B′ をとると，Ｐは線分 A′B′ 上を動く。

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると

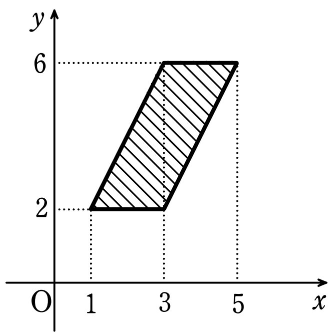
C(6, 0)，D(3, 6)

k を $1\leqq k\leqq 3$ で変化させると，A′ は A から C まで動き，B′ は B から D まで動き，A′B′∥AB，A′B′∥CD である。

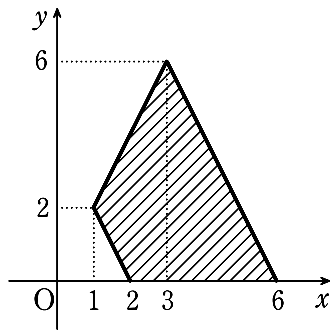
［図］境界線を含む。



(1)



(2)



(3)　$2s=s'$ とおくと　　$s'+t=1$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s'\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たす点 A′ をとると，Ｐは直線 A′B 上を動く。

また，点 A′ の座標は (1, 0) である。［図］

(4)　$3s+2t=6$ の両辺を 6 で割ると　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{3}=1$

よって，$\dfrac{s}{2}=s'$，$\dfrac{t}{3}=t'$ とおくと

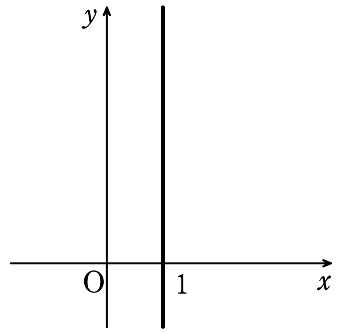
$$s'+t'=1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s'(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

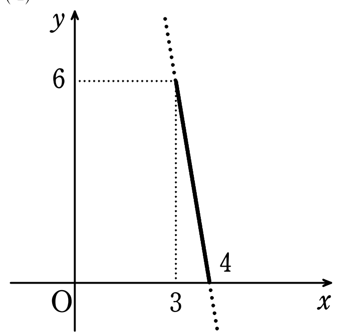
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 A′，B′ をとると，Ｐは線分 A′B′ 上を動く。

また，点 A′，B′ の座標は (4, 0)，(3, 6) である。［図］

(3)



(4)



5　$\vec{n}=(-1,\ \sqrt{3})$ とおくと，$\vec{n}$ は求める直線の法線ベクトルである。

また，O から直線に垂線 OD を下ろすと，条件から　　OD＝4

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は $\vec{n}$ に平行で，大きさ 4 のベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=4\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\quad \text{または}\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=-4\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$|\vec{n}|=\sqrt{1+3}=2$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(-2,\ 2\sqrt{3})$　または　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(2,\ -2\sqrt{3})$

求める直線は，点 D を通り，$\vec{n}$ を法線ベクトルとする直線である。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(-2,\ 2\sqrt{3})$ のとき，直線の方程式は

$$-(x+2)+\sqrt{3}(y-2\sqrt{3})=0\quad \text{すなわち}\quad x-\sqrt{3}y+8=0$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(2,\ -2\sqrt{3})$ のとき，直線の方程式は

$$-(x-2)+\sqrt{3}(y+2\sqrt{3})=0\quad \text{すなわち}\quad x-\sqrt{3}y-8=0$$

6　(1)　A を通り，BC に垂直な直線であるから，そのベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$

すなわち　　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$

(2)　辺 BC の中点を $\mathrm{M}(\vec{m})$ とすると　　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

よって，求めるベクトル方程式は　　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{m}$　(t は実数)

すなわち　　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})$　(t は実数)

(3)　辺 BC の中点 M を通り，辺 BC に垂直な直線であるから，そのベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$

すなわち　　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$

整理して　　$2\vec{p}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2$

7　点 A，B，C，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とすると，

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3$ から　　$|(\vec{a}-\vec{p})+(\vec{b}-\vec{p})+(\vec{c}-\vec{p})|=3$

ゆえに　$\left|(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{p}\right|=3$

すなわち　$\left|3\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|=3$

よって　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=1$　……①

3 点 A，B，C は一直線上にないから，△ABC が存在する。

△ABC の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$ とすると　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

よって，① から　$|\vec{p}-\vec{g}|=1$

したがって，P は G を中心とする半径 1 の円上を動く。

ここで，G の座標は　$\left(\dfrac{1+0+2}{3},\ \dfrac{0+1+2}{3}\right)$

すなわち　(1，1)

よって，P の軌跡は，点 (1，1) を中心とする半径 1 の円である。

8　(1)　$|\vec{p}+\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{a}|$ のとき　$|\vec{p}+\vec{a}|^2=|\vec{p}-\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

ゆえに　$\vec{p}\cdot\vec{a}=0$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\neq\vec{0}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{0}$ のとき　P は O と一致する。

したがって，P が描く図形は O を通り，OA に垂直な直線である。

別解　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\vec{a}$ とすると線分 AA′ の中点は O である。

また　$\vec{p}+\vec{a}=\vec{p}-(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\overrightarrow{\mathrm{A'P}}$

よって，等式から　$|\overrightarrow{\mathrm{A'P}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

ゆえに，点 P は 2 点 A，A′ から等距離にあるように動く。

よって，P の軌跡は線分 AA′ の垂直二等分線，すなわち，O を通り OA に垂直な直線である。

(2)　$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{p}$ と $\vec{a}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると，$2\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|$ から

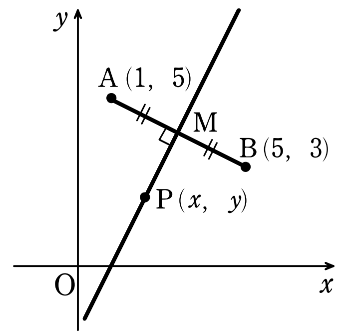
$$2|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{p}|$$

$|\vec{a}|\neq0$，$|\vec{p}|\neq0$ であるから　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　よって　$\theta=60^\circ$

$\vec{p}=\vec{0}$ のとき，P と O は一致する。

したがって，P が描く図形は，O を端点とし，半直線 OA と 60° の角をなす 2 本の半直線である。

9　O を原点とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 5)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(5,\ 3)$ とする。また，線分 AB の垂直二等分線上の点を P とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とする。P は線分 AB の中点 M を通り，AB に垂直な直線上にあるから



$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

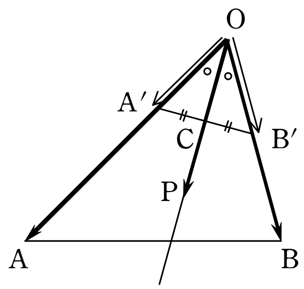
ゆえに　$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$

よって　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$ ……①

ここで　$\vec{p}=(x,\ y)$，$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{5+3}{2}\right)=(3,\ 4)$，$\vec{b}-\vec{a}=(4,\ -2)$

ゆえに，① から　$(x-3)\cdot4+(y-4)(-2)=0$　よって　$2x-y-2=0$

10　(1)　$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とおくと



$$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=1$$

ゆえに，△OA′B′ は二等辺三角形である。

線分 A′B′ の中点を C とすると，二等辺三角形の性質から，直線 OC は，∠A′OB′ の二等分線，すなわち，∠AOB の二等分線である。

また，点 P は直線 OC 上の点であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t'\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (t' は実数) と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t'\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{t'}{2}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)\ (t' \text{ は実数})$$

$\dfrac{t'}{2}=t$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)$ (t は実数)

(2)　(1) から，∠AOB の二等分線のベクトル方程式は，直線上の任意の点を P とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)\ (t \text{ は実数})$$

ここで　$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{1}{\sqrt{12^2+5^2}}(12,\ 5)=\left(\dfrac{12}{13},\ \dfrac{5}{13}\right)$

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\dfrac{1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}(-3,\ 4)=\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

よって，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$(x,\ y)=t\left\{\left(\frac{12}{13},\ \frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)\right\}=t\left(\frac{21}{65},\ \frac{77}{65}\right)$$

ゆえに　$x=\dfrac{21}{65}t$,　$y=\dfrac{77}{65}t$

これから，t を消去して　$11x-3y=0$

$\boxed{11}$ $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から

$$-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=k(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{k+2}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1-k}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 P が △ABC の内部にあるから

$$\frac{k+2}{6}>0,\quad \frac{1-k}{6}>0,\quad \frac{k+2}{6}+\frac{1-k}{6}<1$$

第 1 式から　$k>-2$　　第 2 式から　$k<1$　　第 3 式は常に成り立つ。

ゆえに，求める k の値の範囲は　$-2<k<1$