チャート P443 重要例題109 について

問題

a,b は実数で $a+b=2$ $ab=-6$ $a^2+b^2=16$ $a^3+b^3=44$ を満たしている。

nを 2以上の整数とするとき $a^n+b^n$が 4の倍数になることを証明せよ。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

質問 この問題では、数学的帰納法を使用するとき

$n=k$ および $n=k+1$ で成り立つと仮定するが、このように 仮定が

2つ以上になる場合はどういうときか。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

解説 この問題は東大の入試を変形している。おそらく オリジナル問題は

$a+b=2$ と $ab=-6$ の2つの条件のみを与えてあるだけだと思われる。

a ,b を求めるのは簡単である。解と係数の関係より a ,b は

$x^2-2x-6=0$ を満たす 2つの解であることがわかる。よって $a>b$ と

すると $a=1+\sqrt{7}$ $b=1-\sqrt{7}$ であるから、あとは数値計算の問題と

しても解けるが、大変である。数学的帰納法に目をつけて解くところが

東大合格の分かれ目だろう。

さて $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab = 2^2-2(-6)=16$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2)-ab^2-ba^2=2\cdot16-ab(a+b)=32-(-6)\cdot2=44$

$a^4+b^4=(a+b)(a^3+b^3)-ab(a^2+b^2) = 2\cdot44-(-6)16=184$

・・・・・・・・・ とやっていって初めて次の構造がわかる

$a^{n+2}+b^{n+2}=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1}) -ab(a^n+b^n)$ すなわち

$a^{n+2}+b^{n+2} =2(a^{n+1}+b^{n+1})+6(a^n+b^n)$ ・・・・・・①

ここまでくると 結論は明らかである。

上をみるとわかるとおり 4乗の項は 前の3乗と2乗の項に2と6を

掛けて和をとっている。5乗の項は4乗と3乗

n乗の項は その前の2つについて同様の和をとっている。

よって最初の2つ（$n\geqq2$)が4の倍数なら、その後ろものが4の倍数に

なるのは自明ともいえる。

そういうことを難しそうに解くのが数学である。

さて そろそろ質問に答えよう。

①の式をもう少し見やすくするために $a^n+b^n$ を $c_n$ とおこう

そうすると ①は

$c_{n+1}=2c_{n+1}+6c_n$ ・・・・・①’

そう これは 3項間の漸化式になっている。3項間の漸化式で

次の項を決定するためには 最初の2項が決定されていなければ

ならない。

数学的帰納法の問題で　等式の証明においては、次の項と前の項の関係を決定する式が必要になるが、これは言い換えると①と同じような　漸化式の構造を見いだすことである。 そこで、その漸化式が　2項間の漸化式に対応する場合　数学的帰納法における仮定も1つですむが、ここのように　3項間の漸化式に帰着する場合は k　と k+1　において正しいと仮定する。 というように右辺に対する二つの仮定が必要となる。 もし4項間の漸化式に帰着する式となったら　3つの仮定が必要となるのである。