三角比から円関数(三角関数)へ ①

三角比の基本的な概念はすでに、エジプトにおいて完成されていた。それは広大な領地の測量や、ピラミッドの建設に必要不可欠のものであったろう。 三角形における、角と辺の関係を「三角比」という。

三角比における、「角」とは、「隣り合った辺どうしの開き具合」を与える概念である。エジプトでは、まだ回転という概念はなかった。ピラミッドの石を運び上げるのに、巨大な斜面をこしらえ、そこを「引きずって」石を運んだ。車輪はおろか、コロもなかったのである。

近・現代では角はむしろ、「回転の量」として認識される。正(反時計回り)、負の角や、360° をこえた無限まで続く角をとりあつかう。この時代のながれにしたがって、「三角比」も進化した。回転の様態を記述する関数として「円関数(三角関数)」の概念が確立していくのである。

この「三角比」から、「円関数」への発展を記述するのがこのレジュメの目標である。

1. 三角比

1) 角

「角」について考えてみよう。 小学校のころより、 1周を360等分した「度数法」による角の測り方になじんできた。「分度器」をあてて、測るやりかたである。 ところが、分度器そのものはどのようにしてつくるのであろう。 つまり 1° の大きさはどのようにしてしらべるのであろう。

任意の角を二等分するのはたやすい。コンパスと定規ですぐ作図できる。ところが、任意の角を3等分する方法については「存在しないことが、証明されている。」

円に内接する 正3角形、正4角形、正5角形は作図できる。 よって、60° 、90° 、72° はすぐにもとまる。2つの角の差をとって、例えば 72° と60°
より 12° がもとまり、それを半分にしていって、6° 3° などは求めることができる。 ところが、この方法で1° を作図することはできない。

このように、角をあらわすのに親しんできた「度数法」であるが、必ずしも数学的にとり扱いやすいものではない。 そこで、直線(曲線)の長さをもとに、角を定める「弧度法」という概念ができてくるのであるが、それは、後にまわして、当面親しみやすい「度数法」による角の表現を使用することにしよう。「度数法」による角の表記を「角度」と呼ぶ場合もある。

2) 三角比の定義

三角比の定義 I

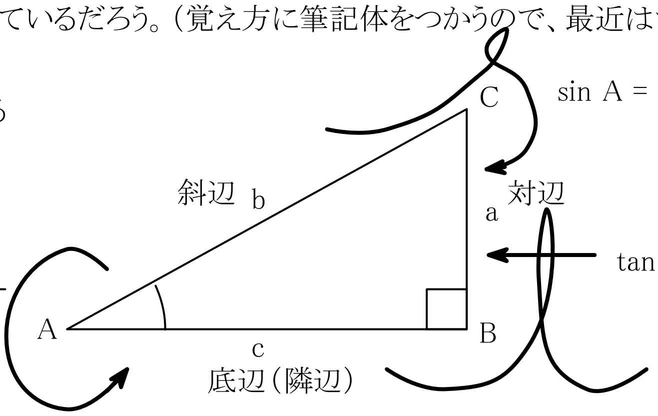
1° 三角比の次の定義は知っているだろう。(覚え方に筆記体をつかうので、最近はすたれてきたが)

$\dfrac{\text{書き終り}}{\text{書き始め}}$ と覚える

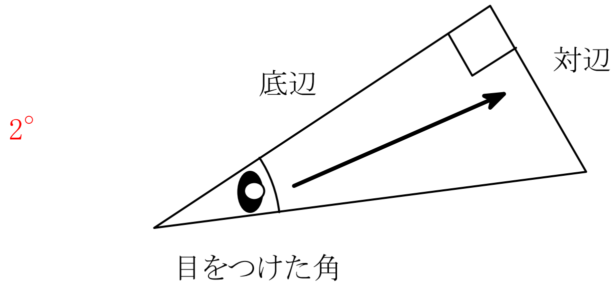
$\sin A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$

$\tan A = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{対辺}}{\text{底辺}}$

$\cos A = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$



この覚え方は、便利であるが、三角形がさかさまになっていたり、裏返しになっていたりするときには注意しなければならない。



対辺や、斜辺の呼び方は、どの角に目をつけているかによってかわる。上の図のように実際その角に「目」をつけてみるとよい。 その目が「見通す」辺が「対辺」 で 「目と直角」を結ぶ辺が「底辺」である

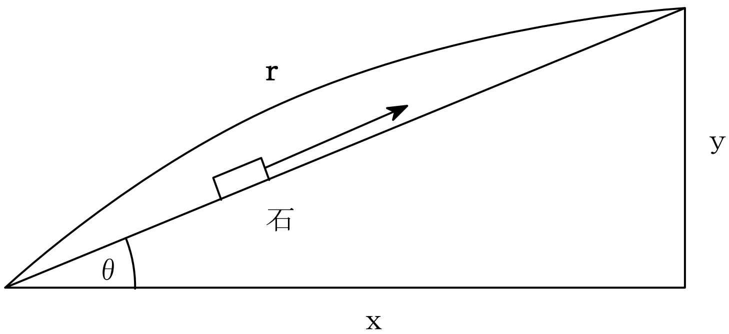
底辺が下にくるように「ノートを回して」考えること。また、上の図に ｓ ｃ ｔ を書くには、裏返したアルファベットをつかわなければならない。

最近では、「下にある辺が底辺」という間違いを防ぐために、「底辺」の代わりに「隣辺」という言葉をつかうことが多くなった。

3) 三角比の定義 再考

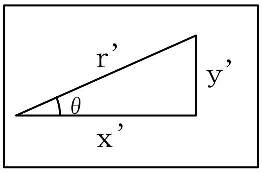
上のような、三角比の定義は覚えるのには便利だが、実用としてはあまり使いやすくない。
そもそも三角比は何を目的として、生まれたのか。 次の歴史もどきのフィクションで再考してみよう。

ナイルのほとりに絶対的権力をもつエジプトの王たちは、競ってピラミッドの建設を命じた。まえにも書いたとおり、ピラミッドに積み上げる石は、下図のような斜面を使って運び上げられる。ピラミッド自体より、完成すると取り去られるこの斜面を作るのにより多くの労力が費やされた。



$$y=\frac{r}{r'}\times y'$$

$$x=\frac{r}{r'}\times x'$$



縮図

縮図をつくり、相似比をかけることによりもとのx，yの値をもとめる。

この斜面で実際に測定可能であるのは、斜面の距離 r とその角度 θのみである。
これをもとに、高さ y と 水平距離 x を求めなければならない。
上では縮図を利用して、 x’y’を測り、それを相似比 r/r’ 倍してx，yを求めている。

縮図を描くには、紙が必要である。 エジプトには、すでに紙の先祖であるパピルスがあったが、これは大変貴重なものであり、学者が計算用に使えるようなものではなかった。 また、使えたとしても、測量の現場では、きちんと製図できるような環境はない。何とか、もっとたやすくできる方法はないだろうか。

そこで右のような表を作った。
斜面 r'を 1 とした直角三角形の縮図をつくり、
角 θを 1° ずつ増やした時の x'と y'の
値を書き並べたのである。
（「よこ」が x'、「たかさ」がy'の数値）。

θ	よこ	たかさ
0°	1.000	0.000
1°	0.999	0.017
2°	0.999	0.034
3°	0.998	0.052
4°	0.996	0.069
‥	‥	‥

この表さえ持ち歩けば、x,y は現場で簡単に計算できる。
r と θは実測値を使用する。
実際の x, y を求めるには、 この数値を r倍 するだけである。縮図と違い高いパピルスなど必要でない。計算なら地面に書いてもできる。 注（r'＝1のおかげで、わり算も必要ない。 割り算が、簡単にできるようになったのは、長い数学の歴史の中で、ついこの間のことであることを注意したい。）

この表は、それぞれの学派の秘伝の書として代々伝えられてきた。（カナ？）

表記法についてであるが、たとえばθが4° の時の右の表の値を
たかさ4° ＝ 0. 069　　よこ4° ＝0. 996
などと表した。 もちろん日本語ではないので、エジプトの言葉で
sin 4°　　cos 4°　　と書いたのである。これが三角比の表記である。
たかサイン　　よコサイン　　とこじつけると覚えやすい。

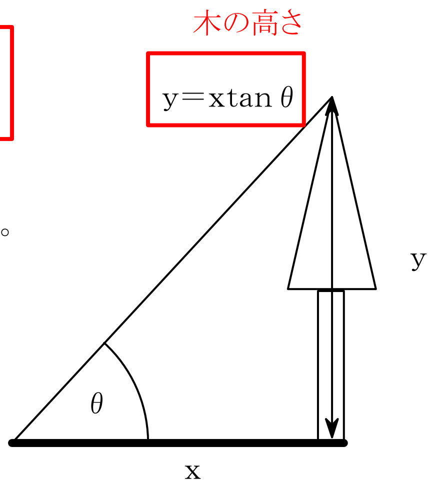
斜辺から高さを求めるのがサインで、横の距離を求めるのがコサイン
の役目である。計算式は 三角比の表を参照して

高さ $y = r \times \sin\theta$　　　よこ $x = r \times \cos\theta$

と おこなう。
もうひとつ、立木の高さを測るのが タンジェントの役割である。
立木の場合は、右のように木の根本までの距離がわかるから
これを x とすると、角度 θをつかって 木の高さ y を

$$y = x \tan \theta$$

と計算できるようにしたものである。 ここで tan は tree の意味である。（？）



実は ここでのべたエジプト語の説明は「真っ赤なウソ」である。それでも、むりやりこじつけて覚える価値はある。

以上をまとめると

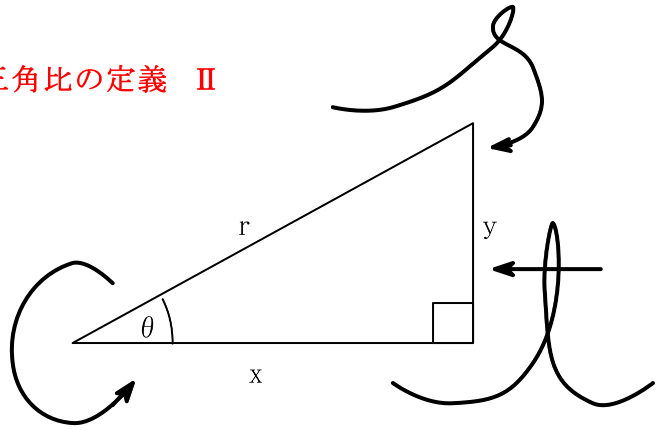
三角比の定義 Ⅱ

3°
$x = r\cos\theta$ （rからxを求める）
$y = r\sin\theta$ （rからyを求める）
$y = x\tan\theta$ （xからyを求める）

である。、前に書いた　三角比の定義の図で

書き始め　から　→　書き終わり　　をもとめる

と覚えなおせばよい。



最初の定義から単に式変形しただけで

あるが、（何)から(何)を求めるときにつかわれるのか?　ということをしっかり把握しておくことがだいじである。じっさい、三角比を使用して問題を解くばあい、こちらの形式で使用することのほうが断然多い。

4）　三角比の応用

三角比によって、実際に測量不可能な長さや角度を他の測量可能な辺や角を使ってもとめることができるようになった。 sin ， cos と tan の間には次のような関係が成り立つ。

4° $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

3°　の最後の式を　x　で割って、上2式を代入してみよ

から、cosとsinがわかれば、tanはもとめることが、出来る。また、sinとcosの間には

5° $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

三平方の定理より。　2乗の場所に注意

が成り立つので、sinとcos　の一方がわかれば　他方をもとめることができる

6° $$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \qquad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

移項してルートをとる

また、tan　から　cos　をもとめる式は

7° $$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

ちょっと面倒だが、やはり代入してみるとでる

がある。

これらの式を使って

8° sin　cos　tan　のうち一つがわかれば、のこりのすべてを求めることができる

のである。　これはいいかえると

直角三角形の1辺とひとつの角がわかれば、残りはすべてわかる

ということと同値である。

とすると、当然次のことが期待される。

任意の三角形においても、未知の辺や角を三角比によって計算することが

できるであろうか？

これは、肯定的に解決される。　この問題を解く鍵が次の「正弦定理」と「余弦定理」である。

5)　三角問題

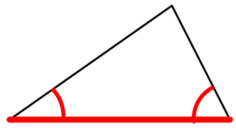
　ここで、三角形の未知の辺や、角をもとめる問題を仮に「三角問題」と名づけよう。

一般の三角形では、90°をこえる、「鈍角」もありうる。鈍角での三角比の定義はどうするのかは、後回しにして、ここでは鈍角の三角比もある方法で定義されている(とかってに)解釈して、先に進もう。

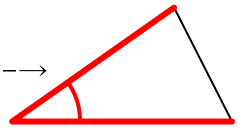
(三角形の決定)

　次の場合に、三角形はきちんと一通りに決定される。

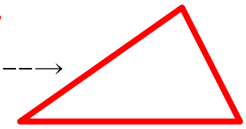
9°　① 一辺とその両端の角があたえられた時 ----------------------→



10°　② 二辺とその間の角が与えられた時 ----------→



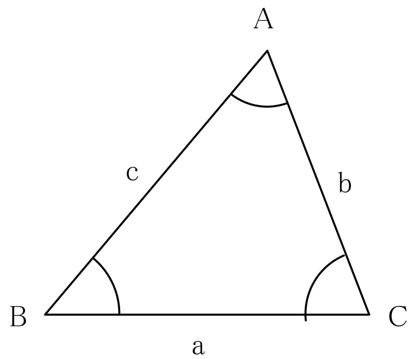
11°　③ 三辺が与えられた時 ------------------------------------→



「三角問題」を解くためのツールは次の二つの定理である。(証明はあとまわし)

12°　I　正弦(sinの)定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\text{(直径)}$$



R は　外接円の半径である。

分数の分母子を忘れやすいので、上のようにピラミッド状の安定形と覚える。

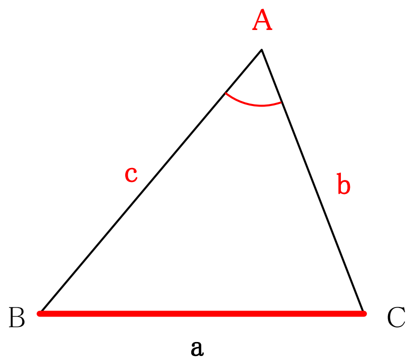
13°　II　余弦定理(cosの)定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \mathrm{Cos}A$$

a, b, c　を順に書き換えて

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ \mathrm{Cos}B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \mathrm{Cos}C$$

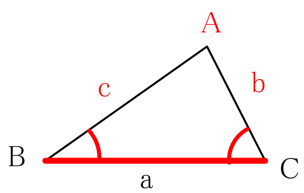


も同様になりたつ　　一番上の式だけ覚え　矢印(サイクリックに回す記号)をつけておけば記憶の節約になる。

(三角問題の解法)

14°　① 一辺とその両端の角があたえられた場合

$\boxed{\text{正弦定理を使う}}$

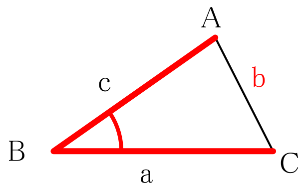


∠A＝180°－(∠B+∠C)　より　∠Aがわかるから、

12°の公式に代入すると残りの各辺が計算できる。

15° ② 二辺とその間の角が与えられた場合

余弦定理を使う



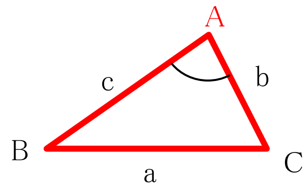
13° の式の2番目をそのまま使うだけ。

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

残りの角は正弦定理で調べればよい。(何度かを求めるには三角比の表が必要)

16° ③ 三辺が与えられた時

余弦定理を使う



この場合、ひとつも角がわかっていない。そこで

余弦定理 13° を cosA= の形に書きなおして

17° $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

これも余弦定理と呼ばれる

これより、cosA をもとめ、 表を使って 角A を見つける。

残りの角を求めるには、正弦定理を使ってもよい。

6) 正弦定理と余弦定理の証明

公式は、最初に証明してから使用するのが、常である。 しかし、実用の立場ではまず使用して、それがどのような場面で使われるのかを先に理解する。そして、「それでは、なぜその公式がなりたつのか?」という疑問をもって証明にのぞむ。という段取りのほうが、覚えやす場合もある。

2次方程式の解の公式や、三平方の定理などは、たいていの人がその証明は忘れても便利に使っている。 「証明を理解してからでないと、心理的に使えない」という人は、それはそれで立派である。

さて、余談はおいて、正弦定理の証明にかかろう。

○正弦定理の証明

右図のように、三角形ABCの頂点Aを、その外接円 O の周にそって動かし、辺c が丁度 円の直径になるところまで、もってくる。

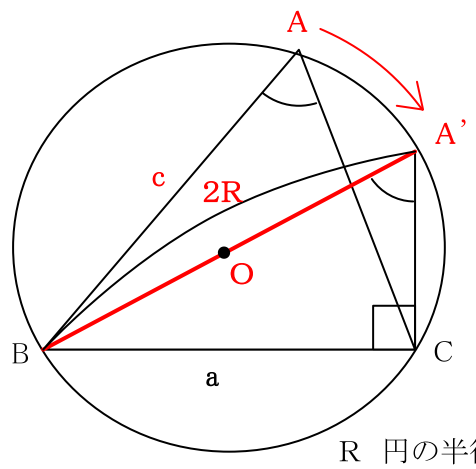
この時、A'B は直径であるので、 2Rとなる。

円周角の定理より、 ∠A=∠A'

△A'BCは直角三角形になるので、

$a = 2R\sin A' = 2R\sin A$

ゆえに $2R = \dfrac{a}{\sin A}$



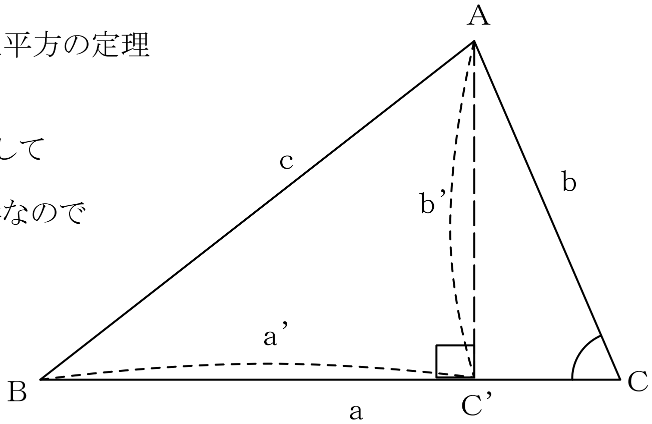
R 円の半径

どうようにして $2R = \dfrac{b}{\sin B}$ $2R = \dfrac{c}{\sin C}$ よって12° は成り立つ。 証明終

○余弦定理の証明

余弦定理は、「直角三角形の三平方の定理」にあたるものが、一般の三角形にもほしい。

という願いから、発したものである。



右の三角形は直角三角形ではないので三平方の定理

$c^2 = a^2 + b^2$ ・・・①

は成り立たない。そこで　Aより垂線をおろして

三角　ABC'をつくると今度は直角三角形なので

$c^2 = a'^2 + b'^2$ ・・・②

が成り立つ。

a'　b'は右側の直角三角形より

$b' = b\sin C$

$a' = a - b\cos C$

とかける。　これを　②式に　代入すると、

$c^2 = (a - b\cos C)^2 + (b\sin C)^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2(\cos^2 C + \sin^2 C)$

$\cos^2 C + \sin^2 C = 1$　であるから

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$　余弦定理　　証明終

をうる。

$-2ab \cdot \cos C$　の部分が　三平方の定理に対する「調整部分」と思えばよい。

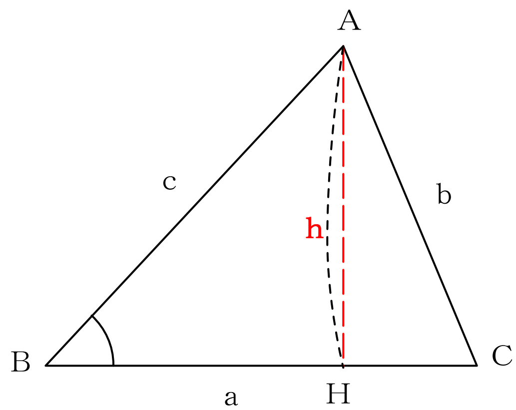
18°　また、右辺は　$(a - b)^2$　の展開形に「余弦定理」であるから、　cosC　を掛ける。

と覚えてもよい。　実は、これは単なる覚え方以上に、本質的な意味があるのだが、ベクトルを勉強するまではお預けである。

7)　三角形の面積

三角形の面積の公式はやさしい。

19°　$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B}$



三角形の面積は

$\frac{1}{2}$×底辺×高さ　　であるので右図より

$\frac{1}{2} \times a \times h$

ここで　$h = c\sin B$　であるから

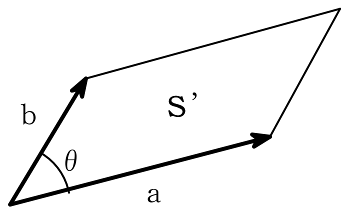
$\boxed{\text{面積公式}\ S = \frac{1}{2}ca\sin B}$

をうる。他の式も同様である。　　証明終

この、三角形の面積公式は　「三角形の面積」としてよりも

それを2倍した「2つの矢印の作る平行四辺形の面積」公式

として大活躍する。覚えておいてほしい。



$S' = ab\sin\theta$

2．円関数

1）円の方程式

ここで、三角比の拡張に必要かくべからざる「円の方程式」を導入しよう。

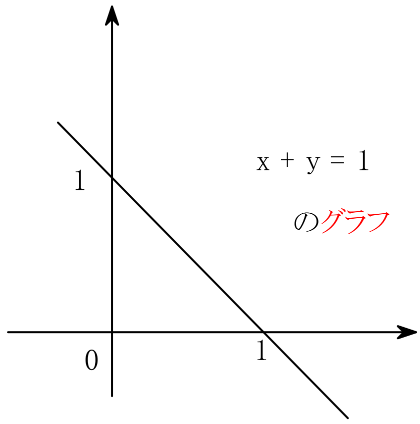
点 p(x,y) は、何の束縛もないと x-y 平面上を自由に動き回る。

ところが、たとえば　　　　　$x + y = 1$　･･･①

などの束縛条件があれば、①式を満たす範囲しか

動けなくなる。 この場合 p(x,y) が動き回れる範囲

は、右の直線上だけである。



そこで、pの動ける範囲(軌跡という)を黒くぬって表示する。

20°　これを　方程式①を満たす点の集合、いわゆる

　方程式 ① のグラフ　という。

①は通常 y = の形に書いて

$$y = x$$

と表示される。

このような表示の仕方　すなわち

$y = f(x)$　(f(x) は xの式の意)

21°　の形のものを、「陽関数」という。

①式で 右辺の 1 を移項すると

$$x + y - 1 = 0$$

すなわち

$f(x,y) = 0$

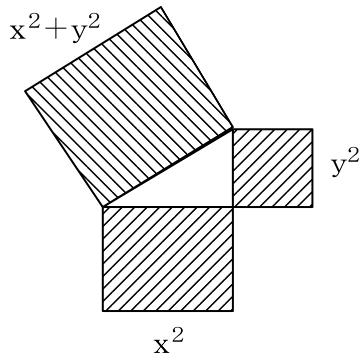
22°　の形に書くことができるが、この形式を「陰関数」という。

円の方程式をはじめ、この陰関数の形に整理すると都合のよい関数達がたくさんいる。

必要に応じて、「陽関数」の形に式変形することができなければならないのでここで注意しておく。

（準備）　三平方の定理と2点間の距離

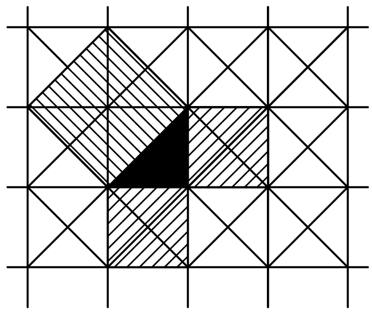
数学の公式のなかで、もっとも不思議なものをひとつあげよと言われると、この三平方の定理を選びたい。ピタゴラスの定理とも呼ばれる、この定理はシンプルでかつ美しい。「直角三角形の斜辺の2乗は他の辺の2乗の和に等しい」というこの定理は、単なる初等幾何学の域を超え、数学全般に重要な役割を果たしている。



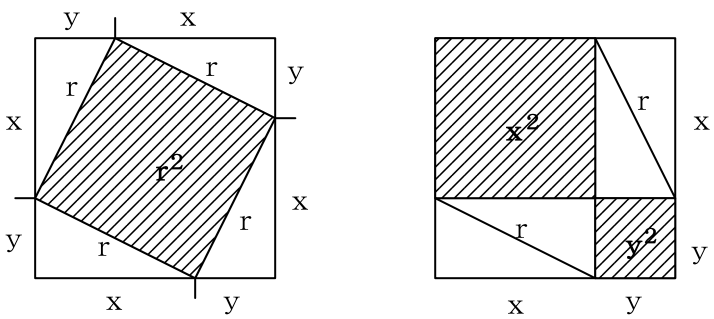
23°　○三平方の定理　　　　$r^2 = x^2+y^2$

ピタゴラスが、教会の敷石の右のような図形を見て、着想したのではないかといわれているが、その真偽のほどは明らかではない。

証明は簡単である。　一辺が　$x+y$　である正方形を下のように分割して、比較する。面積の等しい4個の三角形を引き算してみると、左右の正方形の関係が三平方の定理を与えていることがわかる。



真ん中の敷石の角辺の作る正方形の面積は三平方の定理を満たしている。



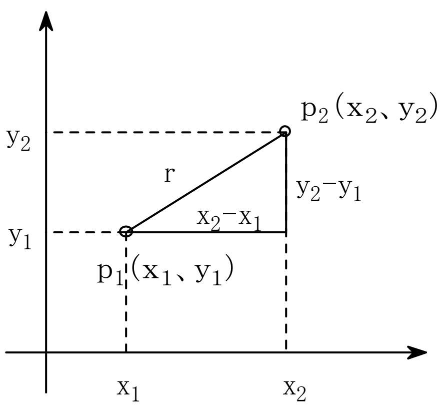
左図の斜線部を比較すると

$r^2 = x^2+y^2$

同じ大きさの正方形から、直角三角形4個分をひいたので、左右の射線部の面積は同じになる。

○　二点間の距離

三平方の定理を使うと、右図のように二点間の距離はすぐ計算できる。



$p_1\ p_2$ の距離を　r　とすると、r　を斜辺とする直角三角形の底辺と対辺の長さは、右図のとおり　x_2-x_1, y_2-y_1 であるから、三平方の定理より

$$r^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

よって

24°　$r = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$　　2点間の距離の公式

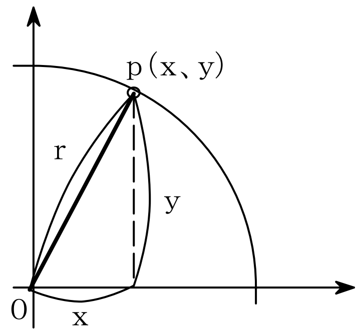
○　円の方程式

円とは、コンパスで書ける図形である。 言葉をかえると 一点 （中心）からの距離が等しい点の軌跡である。

円周上の点 を $p(x, y)$ 円の中心を 原点 $O(0, 0)$ とする。

$OP=r$ （定数） である。 2点間の距離の公式より

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$ ・・・① これが円の方程式である。



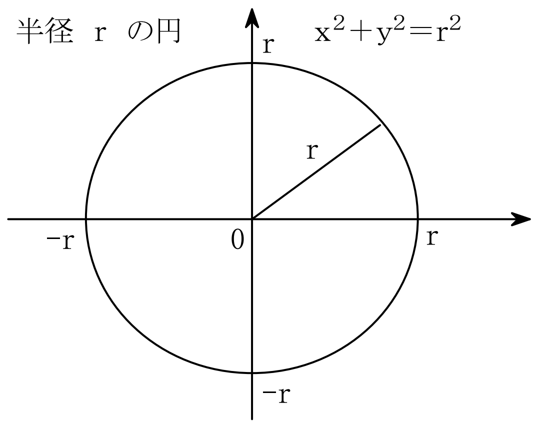
通常、扱いやすくするために ①を2乗した形

25°

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

原点中心 変形 r の円の方程式

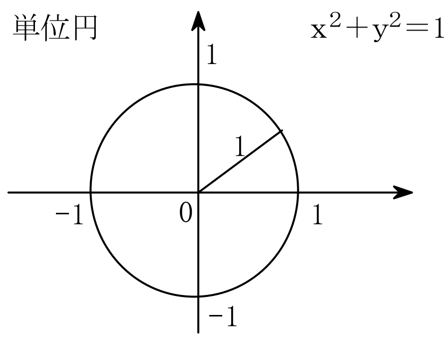
を使用することが多い。



特に半径 1 の円は重要である。
これを、 単位円 とよび 円関数において中心的役割をはたす。

26°

単位円 $x^2 + y^2 = 1 \qquad \cdots\cdots ③$



2) 弧度法

ここで、三角比で使用した「度数法」による角の表し方を見直してみよう。 すでに見たように、1回転を360等分した角の大きさを 1° と定めたのであるが、この1° を作図することは簡単にはできなかった。

そこで、円周にそって、糸をぐるりと巻きつけて、それをほどく。 その糸を伸ばすと直線になるので、数直線を使って計算によっていくらでも精密に(近似計算的に)等分することができる。 360等分した印がついた糸を再び巻きつけて、円の中心から直線をひくと度数法のもとになる分度器をつくることができる。

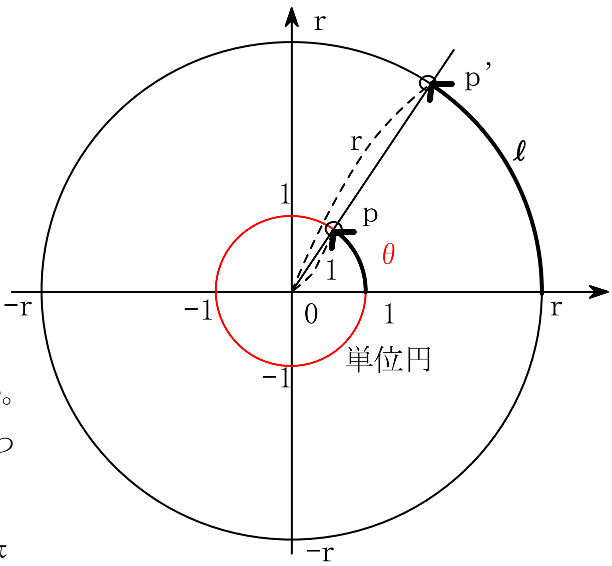
このようにして「度数法」が完成したのであるが、その本質は「巻きつけた、糸の長さ」、いいかえると「その角に対応する扇形の弧の長さ」である。それならば、いっそのこと、1° 2° などという、従来の角度の表示を止めて、「対応する円弧の長さ」であらわしたらどうであろう。

直線(曲線)の長さなら、厳密に「実数」に対応している。実数は、数学的に研究されつくした「取扱やすい」量であるから都合がよい。 こうして、弧の長さで角を表示する「弧度法」が出現したのである。

「弧度法」の基本になる、円弧の長さは円の半径 r によってまちまちである。それでは、同じ角を表す数値がいろいろな値になって不便である。そこで

27° 角を決めるための円は 半径 1 の円 すなわち「単位円」の弧長を用いると約束する。

右図のように、常に単位円の弧長 θ を用いて角を定めるのである。 こうして測った角は「ラジアン」という単位で呼ばれるが、単位は省略することも多い。しばらくはラジアンを主にするが「° 」による表現も わかり安さのために併用する。



円周は $2\pi r$ であるので、 単位円の円周は $2\pi = 6.283185308\cdots$ である $1°$ はこの360分の1で

$$1° = \frac{2\pi}{360} = 0.01745329252\cdots$$ である。

$\pi = 3.141592654\cdots\cdots$

少数であらわすのはわずらわしいので π をそのまま残して

28° $1° = \dfrac{\pi}{180}$ラジアン　　πラジアン$=180°$　……「° 」と「ラジアン」の換算

と書くのが普通である。

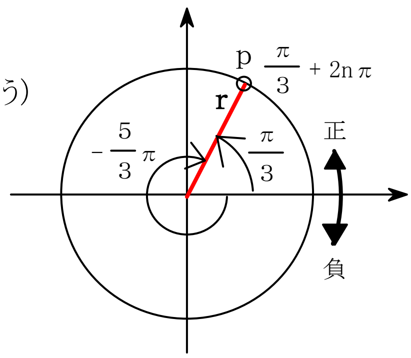
この式によって、両者は自由に換算できるが主要な角度はすぐ出てくるように暗記せねばならない。

29° 1周 $=360° = 2\pi$　　2直角$=180° = \pi$　　直角$=90° = \dfrac{\pi}{2}$

$60° = \dfrac{\pi}{3}$　　$45° = \dfrac{\pi}{4}$　　$30° = \dfrac{\pi}{6}$　　通常ラジアンは省く

角は本来回転の量を計るものであるから、反転や1回転をこえた回転もある。これに対応するために、 X軸を回転の始め(始線という)として、「反時計回り」を正 「時計回り」を負の回転(角)と定め、 逆回転は 負号をつけて $-\pi$ などと表す。

また、n回転の角は 2π のn倍であるから　　$\theta = 2n\pi$ などと書く。 原点から、円周上の点 p へ引いた線分(動径という) r の角を考えよう。



右のように、動径 r の角は図の上では、$\dfrac{\pi}{3}$ とも すで 1回転したと考えて、 $2\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7}{3}\pi$ とも考えることができる。 また、逆回転したとすると

$-\dfrac{5}{3}\pi$ と考えることもできる。 図だけでは、回転の方向や回数はわからないので、これらの角

30° をひっくるめて $\boxed{\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (\text{nは整数})}$ などと書く。 このような角の表示を 「一般角」という。

（再考）　なぜ弧度法なのか？

度数法と弧度法の大きな違い、は後者が　長さ＝実数　であることである。
弧度法で表わされた、角　θ は実数であるので、数学上のあらゆる演算を行うことができる。
たとえば

$\sqrt{180^\circ}$　はいくらになるか。

「°　」という不明確な量にたいして、この計算は不可能である。

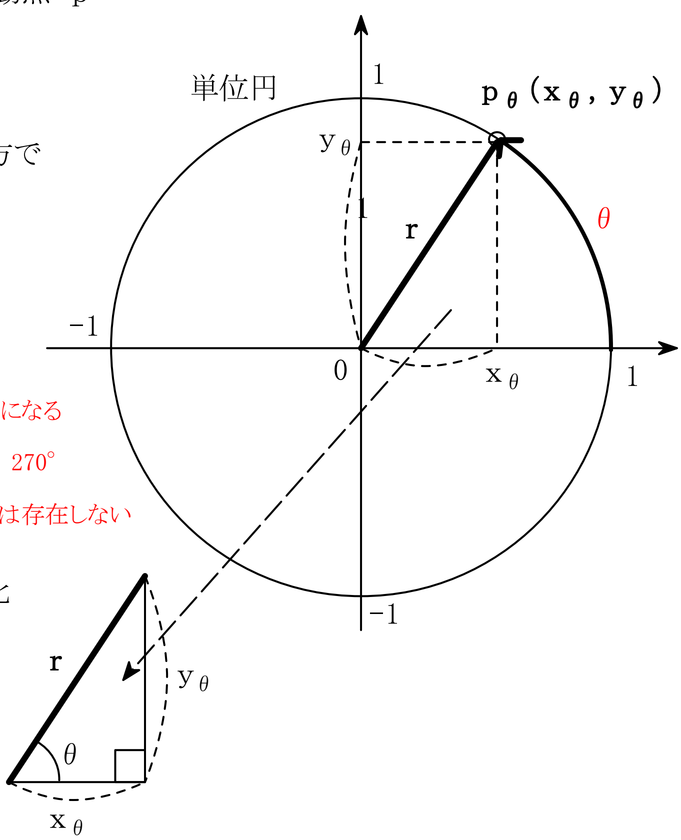
ところが、弧度法による　180°　は　$\pi=3.141592654\cdots$　という実数であるので
$\sqrt{\pi}=1.77245385102123\cdots$　という明確な意味をもつ。
このように、弧数法による表現によってはじめて「角」は微積分学をはじめとする現代数学の要求に答えることできるのである。

3）円関数（三角関数）の定義

やっと、三角比を円関数（三角関数）に拡張する準備がととのった。 従来円関数は三角比で使用された　sin　cos　tan　の記号をそのまま踏襲するので　三角関数といわれることが多い。 高校の数学の教科書でも「円関数」の呼び名を使うものはない。 しかしながら、明らかにこの関数は円関数の名がふさわしい。 このレジュメではあえて「円関数」の呼称を使用するが、読者は適宜「三角関数」という名前に置き換えられてかまわない。

31°　円関数とは、単位円上を動く動転　p　の　X、Y成分および　動径　r　の傾き（＝y/x）のことである。

始線（X軸正方向）から測った角が θ である　動点　p を　p_θ　、そのX, Y成分を　$p_\theta(x_\theta, y_\theta)$
と書く. 傾きは　$t_\theta=y_\theta／x_\theta$　とかく。
円関数は歴史的な習慣により三角比の書き方で次のように書くこともある。



32°
円関数の定義

$$x_\theta = \cos\theta$$
$$y_\theta = \sin\theta$$
$$t_\theta = \frac{y_\theta}{x_\theta} = \tan\theta$$

分母が0になる
$\theta=90^\circ$　270°
ではtanは存在しない

θ が90°　以内であれば、この円関数と三角比の価がぴったり一致することは、右の直角三角形をみると明らかであろう。
（単位円であるので　r＝1　に注意）

前ページの定義によると、θ が　90°　を越えた場合でも、大丈夫である。それどころか、$-\infty$から$+\infty$　までのすべての θ にたいして円関数(三角関数)が定義される。

$p(x, y)$　(誤解のおそれがないときは、x_θ　y_θ　の θ を略することもある)

は　単位円　$x^2 + y^2 = 1$　・・・①

上の点であるから、当然　①式をみたす。

よって　公式

三角比の書き方では

33°　$\boxed{x_\theta^2 + y_\theta^2 = 1}$　　　$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

が成り立つのは当たり前である。

34°　また、$\boxed{t_\theta = \dfrac{y_\theta}{x_\theta}}$　　　$\boxed{\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

は定義そのものである。

35°　$\boxed{1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$　の公式を証明してみよう。　θ を略してかくと

左辺 $= 1 + t^2 = 1+\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} =$ 右辺　　　証明終

pは単位円周上を移動するのであるからそのx, y　成分は次の範囲である。

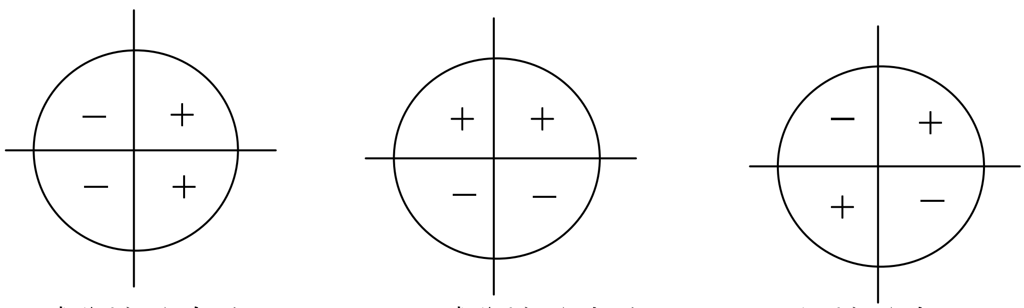
37°

$-1 \leqq x_\theta \leqq 1$	$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$
$-1 \leqq y_\theta \leqq 1$	$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$
傾きはいくらでも急になれるので	
$-\infty \leqq t_\theta \leqq +\infty$	$-\infty \leqq \tan\theta \leqq +\infty$

それぞれの正負を　各象限(座標軸にわけられる平面を左回りの順で　第1象限　第2象限　第3象限　第4象限という)ごとに図示したものである。　覚えておくこと

38°

x_θ　(　$\cos\theta$　)　　y_θ　(　$\sin\theta$　)　　t_θ　(　$\tan\theta$　)

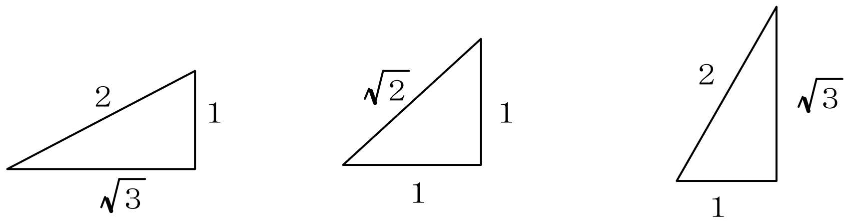


x成分だから右が＋　　y成分だから上が＋　　y/x だから左の2つより

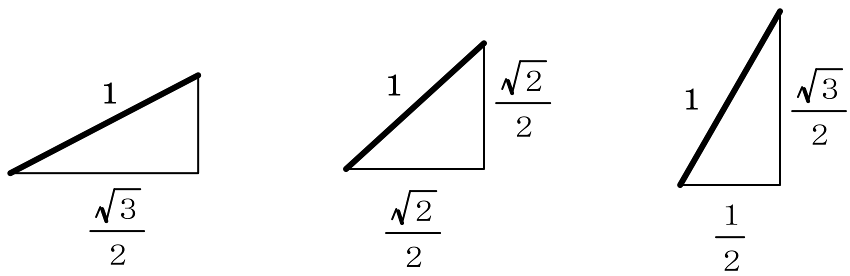
4)円関数の値

(三角定規の辺の長さ)

30°　45°　60°　の角をもつ三角定規の辺の比はよく知っているであろう。　加えて下図のように斜辺を1としたときの値も覚え　ておいてほしい。

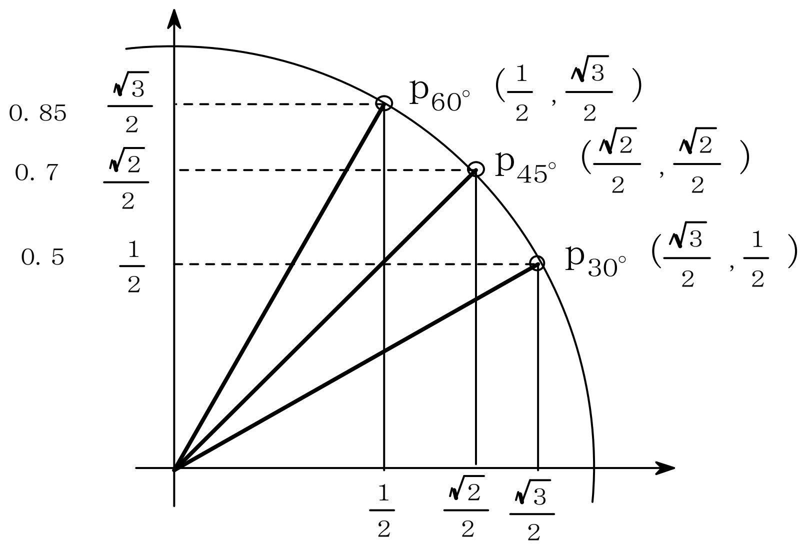


39°



なぜなら、これらの三角定規を単位円の第1象限に埋め込むと
右図のように、30°（π／6)，　45°（π／4)，　60°（π／3)における
円関数の値を決めるのに役立つからである。

40°



数値は3種類しかないので、その大きさの関係を覚えてほしい

41°　$\boxed{\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

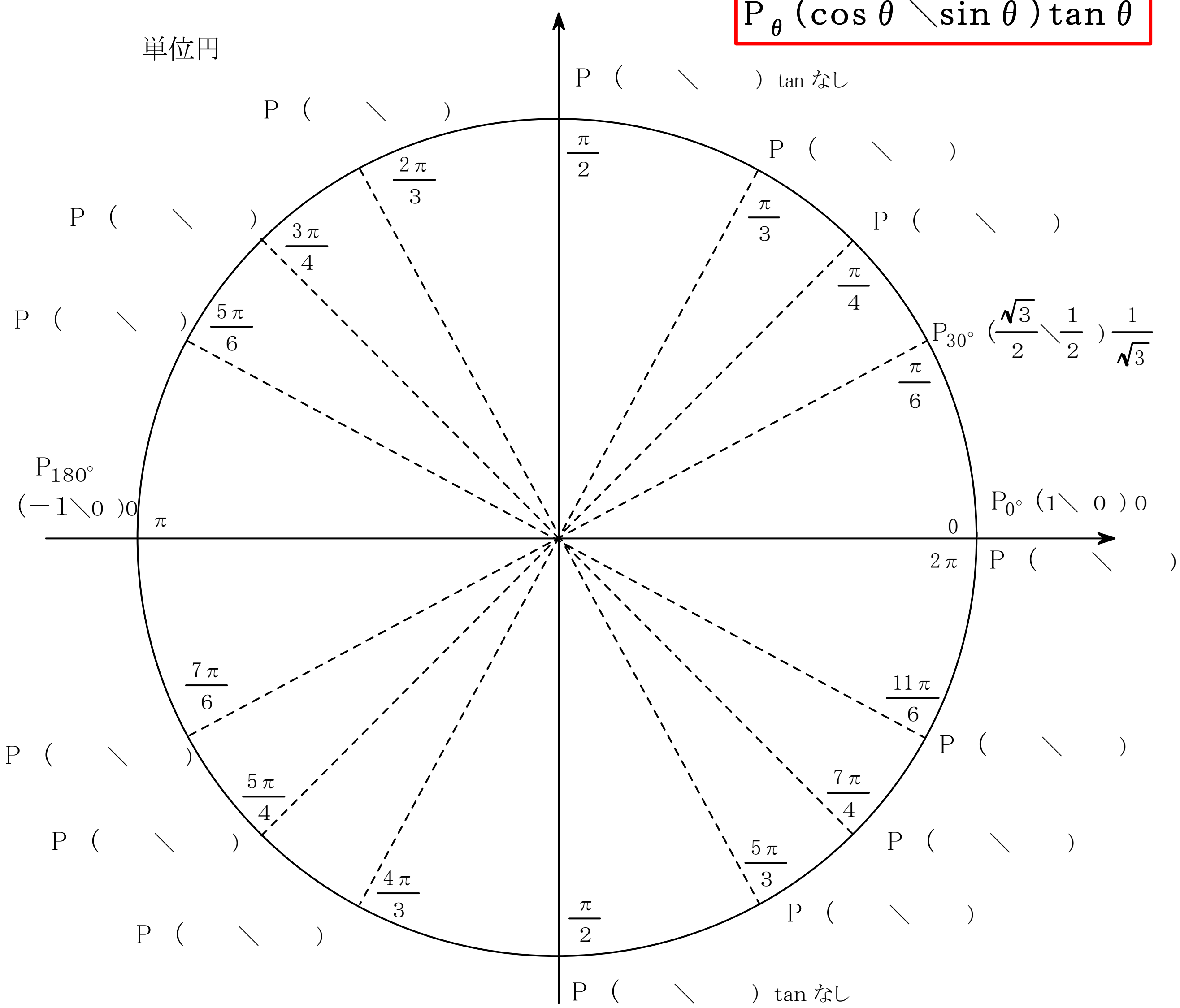
上の図におよその数値を書いておいたがむしろ作図上の

感覚として覚えることが大事である。

（暗記表）　次の表は　0　～　2π　（ 0°　～360°　）における円関数の値である。

42°　　$p_\theta(x_\theta ＼ y_\theta)t_\theta$　の形で自分で数値を入れてみよ。

$\boxed{P_\theta(\cos\theta ＼ \sin\theta)\tan\theta}$



Pの側には　度数法による　角度を書き入れよ

また、各点での　x, y　成分　すなわち　cos θ　　sin θ　の値を（ ）内にかけ

（ ）の外側の適当な場所に　tan θ　の値をかけ

（　）の真ん中に　＼　があるのは 右÷左　の分数の意味　それぞれの分子をわり算すると タンジェントになる。

数値をいれてしまったら、全部覚えよ（ 度数法　弧度法の両方で）

円関数（三角関数）はだいたい上の角についての値を覚えておけば十分である。

負の角は右回りに換算すればよい。また、一回転したらもとに戻るので大きな角についても

この表で足りる。

覚え方　　藤尾センセの　1．2．3の法則

前ページで、「360°　までの　sin θ　　cos θ　tan θ　を覚えよ」 と聞いたとたん、三角関数はいやになってしまった人がいるかもしれない。 じっさい、三角関数に入ると、これでもか！　というほど公式達が群がってくる。 たいていの人はここでいやになってしまうのである。
このレジュメの目的は、そういう人たちを救うことである。
「実は簡単におぼえられるのだ」　　　　43°

○第一象限のみ覚えれば十分

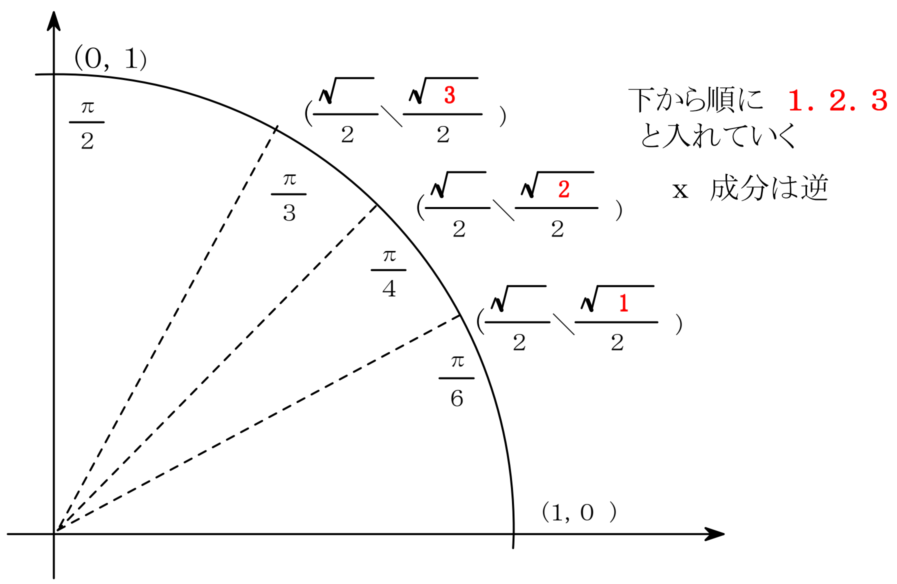
　第2象限は　第1象限の数値を　y　軸に対称な形でコピーすればよい。
　第3，4象限は　それを今度は　x　軸対称に下にコピーすればよい。
　ただし、左側では　x成分が　下側では　y　成分が負になるので　－　をつけること
　tan　の符号は　＋－＋－　と変わる。（＊＊＊参照）

○　30°　45°　60°　の3つの(x，y)座標のみ覚えれば十分

　前ページにあるように、tanの値は　y　と　x　の分子同士のわり算ですぐわかる
　0°　と　90°　の座標は　(0,1)　と　(1，0)であるので、覚えるほどのこともない

○　問題の3つは　次の　「1．2．3」の法則により　解決

　まず(　)の中に、全部共通に　$\left(\frac{\sqrt{\ }}{2}, \frac{\sqrt{\ }}{2}\right)$を書き込む
　次に下の図のようにy成分は増えていくから、下から順に　1．2．3　を　x　成分は逆に　3．2．1を書き込む
　$\sqrt{1}$　＝　1　なので　$\sqrt{\ }$　記号ははずしておく。　　　　　これでおしまい



1．2．3の法則

前ページの覚え方によって、360° の暗記表を埋めることは簡単であるが、暗記表を作ることが目的ではないことをよく承知しておかれたい。あくまで暗記しておいて、他の問題を解くときに使用できることが大事である。

44°

1 や 0 は$\pi/2$(90°)関係で現れる。図でいうと x、y軸上の点である。 特にy軸上では$\tan\theta$の値は存在しない。 ($t=y/x$ において、xが0 となるので割り算できなくなる。) $\sqrt{2}/2$ は $\pi/4$ (45°)関係の角で現れる。 $\sqrt{3}/2$ や 1/2 は $\pi/6$ (30°) や $\pi/3$ (60°)関係の角で現れる。

という特徴的なところをきちんと把握しておくこと。

5) 三角方程式

今後、教科書などとの対応を考えて、数Ⅱの用語や表記法に戻すが、ことわりなしに円関数的な表記も使うので注意してほしい。

sinやcosの式から逆に 角 θをもとめることを、「三角方程式を解く」という。
次のような例は 三角方程式のもっともかんたんなものである。

(1) $\sin\theta = 1/2$

基本的には三角関数表を逆に引いて sinの値が0.5のときの角をもとめるのであるが
試験で表が与えられないときは、(暗記表)の範囲で解ける。
(暗記表)より sin すなわち y成分が 1/2 となっているところを探して

答 $\theta = \pi/6$ (30°) , $5\pi/6$ (150°)

n回転まで考慮すると、一般角の表記を使って

答 $\theta = \pi/6 + 2n\pi$, $5\pi/6 + 2n\pi$ と書く

問題がどのような範囲での答えを求めているか、よく注意しておくことが必要である。
たとえば

45° (2) $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ を解くとき x成分が $\sqrt{3}/2$ となっているところを探して

$\boxed{0 \leqq \theta < 2\pi \text{ の範囲なら 答 } \theta = \pi/6,\ 11\pi/6}$

であるが

$\boxed{-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2 \text{ の範囲なら 答 } \theta = \pi/6,\ -\pi/6}$

と答えなければならない。
一般角で という場合は $+2n\pi$ をつけるだけである。
±を使って

$\boxed{\text{一般角では 答 } \pm\pi/6+2n\pi}$

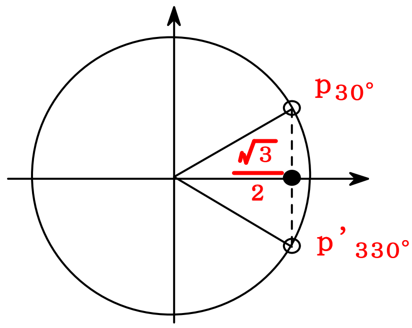
とまとめができるが、分けて書いても別にかまわない。

前のページでは三角方程式を解くのに、暗記力をつかったが、あまり理論的とはいえない。もう少し理論的な解き方をしてみよう。 θ の範囲はことわらない限り $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

$\cos\theta = \sqrt{3}/2$ は x_θ で書きなおすと $\boxed{x_\theta = \sqrt{3}/2}$

すなわち、点 p のx成分が $\sqrt{3}/2$ である θ をさがせ という意味である。

よって 右のように 作図によって求めることができる。



46°

① x成分であるから、 X座標上に $\sqrt{3}/2$ をとる (右図の ●)
② p を調べるためにそこから 垂線を引く
③ 垂線と単位円の円周との交点(通常2つある) を p p'とし、その角を調べると 答えがわかる。

この方法は本質的だが、電卓・定規・分度器がなければ簡単ではない、そこで基本的な角にたいするものしか出題されない。 前にやった三角定規の形状(39°)を思い出して間違いなく作図することが大事である。

6) 三角不等式

三角関数の混じった不等式である。 上の例をつかうと

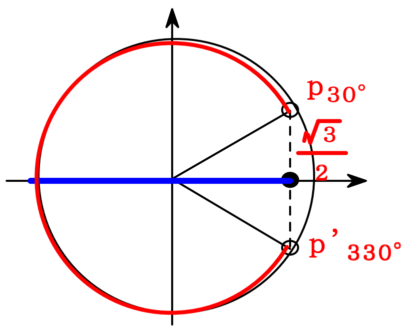
$\cos\theta < \sqrt{3}/2$

などである。 x_θ でかくと

$x_\theta < \sqrt{3}/2$ であるから、 $\boxed{\text{x成分が } \sqrt{3}/2 \text{ より小さいすべての点 p を探せ}}$

ということになる。

作図は右のとおり



47°

① 方程式と同じようにしてX軸上に $\sqrt{3}/2$ をとる。
② X軸の $\sqrt{3}/2$ より小さい範囲を塗りつぶす (図の青色の範囲)
③ そこに対応する円周上の点 p を塗りつぶす (図の赤色の範囲)
④ その範囲の角を不等式で答える

右図より θ の範囲は

<u>答 $30° < \theta < 330°$ (弧度法では $\pi/6 < \theta < 11\pi/6$)</u>

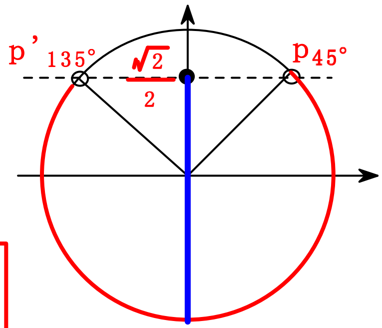
もし元の問題に ≦ と=が混ざっている場合は答にも=をつけること。

（三角不等式の注意）　θ の範囲が指定してある場合には注意が必要である。たとえば

$0° \leqq \theta < 360°$　の範囲で　$\sin\theta \leqq \sqrt{2}/2$　を解け。

という問題を考えてみよう。　解き方は　$y_\theta \leqq \sqrt{2}/2$　であるから、y成分について

作図すればよい



y軸上に　$\sqrt{2}/2$より小さい範囲をとって

対応する円周上の範囲を探す

右図より

$135° \leqq \theta \leqq 45°$　とかくと　間違い

48°　（$0° \leqq \theta < 360°$　の範囲）という条件に合うように
答を書きなおさなければならない。

本質的ではないが面倒くさい。慣れること。　正しくは

答　$0° \leqq \theta \leqq 45°$，　$135° \leqq \theta < 360°$

と分けて書く。　360°　のそばには　＝　がないことも注意

7）　少し複雑な三角方程式

普通三角方程式も三角不等式もこのように単純な形では出題されない。

ここでは、三角方程式について少しだけ複雑になったものを練習してみよう。

三角方程式は通常の方程式に三角関数がまじっているものである。これを解くには、

49°
①まず通常の方程式として解く。
②たとえば　sin　や　cosは　－1から　1　までの範囲でしか存在しない
のでそれを考慮して有効な解を選択する。
③その解に対応する角をもとめ答えとする。

50°　練習問題　1）　$2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$　　（$0° \leqq \theta < 360°$）

$\sin\theta = y_\theta$　であるから　θ を省略してかくと

$2y^2 - y - 1 = 0$

これを解いて

$(2y+1)(y-1)=0$　より　$y = -\dfrac{1}{2}$，　$y=1$

いずれも　$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$　をみたしているから　正しい解である。

$\sin\theta = -1/2$　より　$\theta = 210°$，　$330°$

$\sin\theta = 1$　より　$\theta = 90°$

答　$\theta = 90°$，$210°$，$330°$　　問題が度数法でかいてある場合はそれにあわせて度数法で答える。

一般的には、sin　cos　tan　が入り混じったもっと複雑な方程式が出題されるが、それについてはもう少し進んだ知識が必要であるので後にまわそう。ここでは次の応用問題を解く

51° 応用問題　1) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$　・・・①　のとき　$\tan\theta$ をもとめよ。

三角方程式の問題として　θ　をもとめ　その θ を $\tan\theta$ に代入して答えをもとめればよいように思われる。 ところが、sinとcosが混在していまのレベルでは難しい。

そこで次のような巧妙な方法を使おう

①を　$x_\theta = \cos\theta$　, $y_\theta = \sin\theta$　を使って書きなおし　両辺を2乗すると

$(x + y)^2 = 2$　　θ は省略

$x^2 + y^2 + 2xy = 2$　　　$x^2 + y^2 = 1$　であるから

$2xy = 1$　$\therefore$　$xy = \frac{1}{2}$

ここで　x　と　y　は　足して $\sqrt{2}$

かけて　1/2　となる2数であるから

右の公式より

$t^2 - \sqrt{2}t + 1/2 = 0$　の二つの解である

$(t - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 0$　　より　$x_\theta = y_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\theta = \frac{y_\theta}{x_\theta} = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$

公式　52°

足して　b

かけて　c　となる2数は

方程式

$t^2 - bt + c = 0$

の2つの解である。

詳しくは解と係数の関係を見よ

このように、三角方程式を直接とかなくても解くことができる。 三角関数のひとつがわかれば残りは全部もとめることができたことを思い出そう。

8)　角度の簡略化

たとえば　$\theta = 390°$　とする。 これは　1まわりしてさらに30°　回転したところであるから、単位円上の場所は　$\theta = 30°$　のところと同じである。

そこで　sin390°　= sin30°　などと　より簡単な角に直すことができる。

同様のことは　単位円とX, Y軸との交点　90°　180°　270°　360°（=0°）

を利用しておこなうことができる。

52°　例

右のように　$90° - \theta$　の角をもつ点　P'と　θ の点P の成分を比べてみると目視でも明らかなように

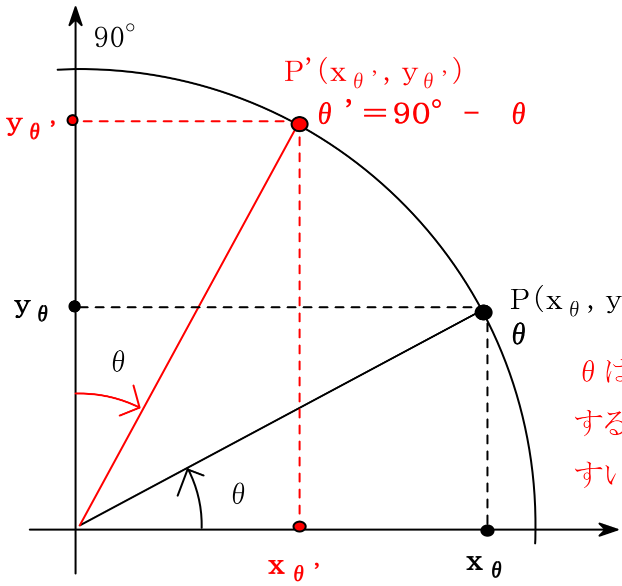
$x_{\theta'} = y_\theta$　　$y_{\theta'} = x_\theta$

の関係がある。すなわち

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

が成り立つ。



θ は小さな角にすると分かりやすい

$\tan\theta$ については

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{y_{\theta'}}{x_{\theta'}} = \frac{x_\theta}{y_\theta} = \frac{1}{\frac{y_\theta}{x_\theta}} = \frac{1}{\tan\theta}$$ となる。

このような公式は　$90^\circ \pm \theta$　$180^\circ \pm \theta$　$270^\circ \pm \theta$　$360^\circ \pm \theta$　について sin cos tan の三本ずつあるから　全部で　24本ある。 これを全部覚えなければならない。(うわーーっ)

まずは、例のように　成分を比較することによって下の公式群を完成させなさい

軸回りの角の変換公式

53°

① 90°　まわり

$$\begin{cases} \sin(90^\circ - \theta) = \\ \cos(90^\circ - \theta) = \\ \tan(90^\circ - \theta) = \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(90^\circ + \theta) = \\ \cos(90^\circ + \theta) = \\ \tan(90^\circ + \theta) = \end{cases}$$

② 180°　まわり

$$\begin{cases} \sin(180^\circ - \theta) = \\ \cos(180^\circ - \theta) = \\ \tan(180^\circ - \theta) = \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(180^\circ + \theta) = \\ \cos(180^\circ + \theta) = \\ \tan(180^\circ + \theta) = \end{cases}$$

③ 270°　まわり

$$\begin{cases} \sin(270^\circ - \theta) = \\ \cos(270^\circ - \theta) = \\ \tan(270^\circ - \theta) = \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(270^\circ + \theta) = \\ \cos(270^\circ + \theta) = \\ \tan(270^\circ + \theta) = \end{cases}$$

④ 360°　(=0°　)まわり

$$\begin{cases} \sin(-\theta) = \\ \cos(-\theta) = \\ \tan(-\theta) = \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(360^\circ + \theta) = \\ \cos(360^\circ + \theta) = \\ \tan(360^\circ + \theta) = \end{cases}$$

ごくろうさま。それでは、簡単に覚える方法を教えてあげましょう。

この公式群の右辺は ①符号の＋－　②関数の変化

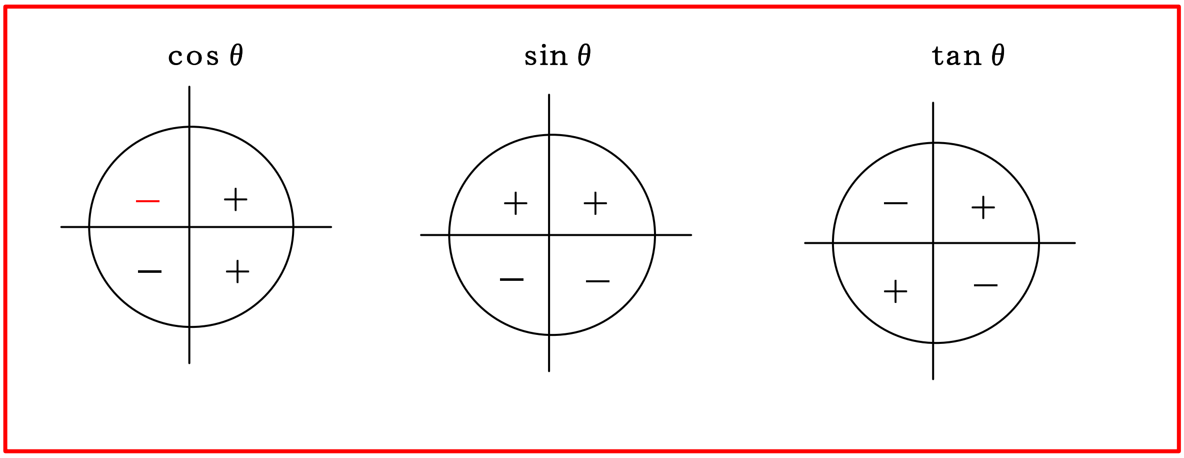
の二つがわかれば書ける。 関数の変化とは $\sin \longleftrightarrow \cos \quad \tan \longrightarrow \dfrac{1}{\tan}$ と変わるか

そのまま変化しないかのどちらかである。

①の符号については 左辺の角 に対する sin cos tan の符号表 （ 38° ） によって

決定される。 例 $\cos(90° + \theta)$ なら 左の図の第2象限なので 符号は －

54°



② 次に X軸 と Y軸 をつぎのように 呼び変える

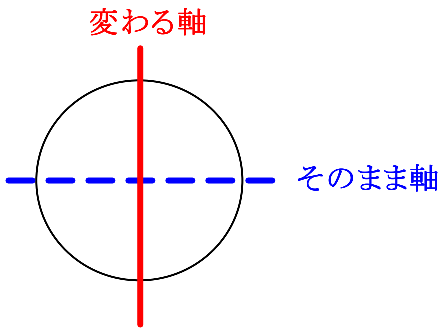
意味するところは

○「そのまま軸」に対応する 180°　360° （0° ）

周りの公式では 関数は変化しない

○「変わる軸」 に対応する 90°　270°

周りでは



55° $\boxed{\sin \longleftrightarrow \cos \qquad \tan \longrightarrow \dfrac{1}{\tan}}$

と変化する

例 ① 右の角は $270° - \theta$ である

から 第3象限 よってsin cos

tan の符号は順に ＋－－

$$\begin{cases} \sin(270° - \theta) = + \cos\theta \\ \cos(270° - \theta) = - \sin\theta \\ \tan(270° - \theta) = - \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$

② 270° は「変わる軸」だから

関数は変化する

前ページの公式群の答えを 上の規則をつかってチェックしなさい。

注 この規則はあくまで「覚える」ためのもので、「成分を比較する」方法が正道である。

これらの公式によって、任意の角の三角関数は0°から45°までの三角関数で表現できる。
つまり、三角関数表は　45°まで精密に作成しておけばよいのである。
電卓のある現代ではあまり意味がないかもしれないが、半世紀前まではこれは重要なことであった。
現代では、数値計算的意味合いより、むしろグラフの平行移動と関連して

$\boxed{\sin(\theta-90^\circ)=-\cos\theta}$　　$\sin(\theta-90^\circ)=\sin(-(90^\circ-\theta))=-\sin(90^\circ-\theta)$

$=-\cos\theta$　と導かれる

などの理論的側面が重要になってくるが
このことについては後に回す。

公式を応用してみよう

56°（練習問題）　$\boxed{\cos137^\circ \text{ を } 45^\circ \text{ 以下の角で表せ}}$

$\cos137^\circ=\cos(180^\circ-43^\circ)=-\cos43^\circ$（答）

137°を　90°まわりの角と考えて

$\cos137^\circ=\cos(90^\circ+47^\circ)=-\sin47^\circ$

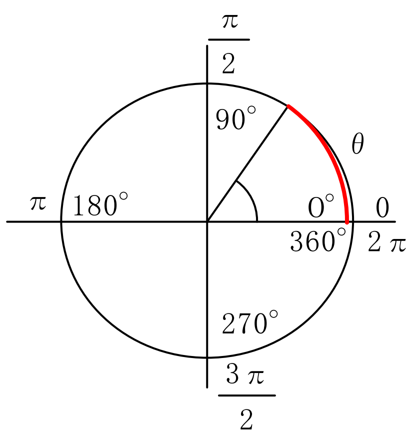
とするとこともできる。 90°以下の角で求める場合は両方とも正解であるが
この問題のように45°以下という条件がある場合は、公式をもう一度使って

$-\sin47^\circ=-\sin(90^\circ-43^\circ)=-\cos43^\circ$

とせねばならない。
どちらにしろ問題の角に最も近い軸まわりの公式を使うほうが無難である。

9）弧の長さと扇形の面積

だいぶ　度数法　による記述が続いたが、ここでまた孤度法による記述を復活させよう。
右に念のため　度数法と孤度法による角を併記したが、
弧度法でも角のイメージがちゃんとできるようにしてほしい。



さて、単位円では弧長そのものが　角をあらわす
指標であったから角 θ の値そのものが　弧長である。
また、　単位円の面積が

$\pi\times1^2=\pi$　　　円周が　$2\pi\times1=2\pi$

であることから　角 θ である扇形の面積は円の面積の

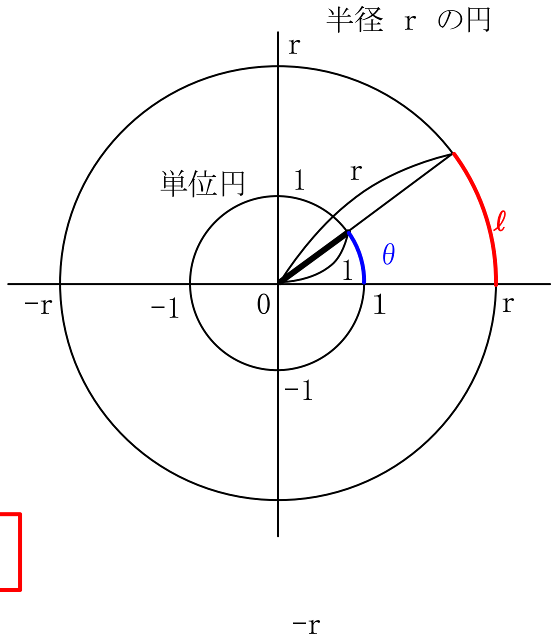
$\dfrac{\theta}{2\pi}$　になることから

$$\text{面積} = \pi\times\frac{\theta}{2\pi}=\frac{\theta}{2}$$

となる。

半径　r　の円の場合は　その　r　倍だけ大きくなる
わけであるから、　右の二つの扇形の相似比は　r
である。　よって　長さの場合は　r　倍
面積の場合は　r^2　倍して

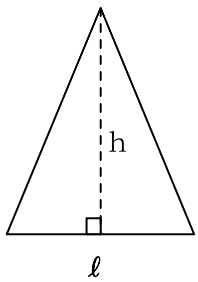
	単位円	半径　r　の円
57° 弧長　ℓ	$\ell=\theta$	$\ell = r\theta$
面積　S	$S=\dfrac{\theta}{2}$	$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

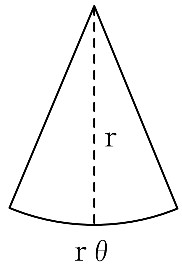


これが　弧長と　扇形の面積の公式である。
例えば面積の計算で　r　と　θ の掛け算が
でてくるが、ここで　r　も　θ も　長さ　である
から、掛算したものが面積になるのである。
度数法「°　」であらわさている場合、上の公式は
意味がなくなるのはわかるであろう。

θ は　ラジアン　で計ったものを使わねばならない。

ここで扇形の面積が下のように三角形の
面積公式に酷似していることは　注意しておく。





58°　　面積　$S=\dfrac{1}{2}\ell\cdot h$　　　$S=\dfrac{1}{2}r\theta\cdot r$

注　ここで、われわれは　円　の面積を知っているかのように取り扱ったが、実は微小な扇形の面積を積み重ねる手法（積分という）によって初めて円の面積は計算されうるのである。小学校で教わった円の面積は単なる「知識」でしかない。　弧の長さを求めるのも同様である。

これから先　三角関数のグラフと加法定理などまだまだ重要な内容がのこっているが、それは「三角関数(円関数)②」の内容とする。　これに進む前にぜひ「動き回るグラフ達①」に目を通しておかれることをお勧めする。