三角関数(円関数)②

「三角比から円関数へ①」において、三角比が　円関数(三角関数)へ発達していった過程を見てきた。このレジュメは　その続編として　「三角比から円関数へ②」とするつもりであったが、内容的に三角比の出る幕はなさそうなので、省いた。また、「円関数」も一般的なネーミングの「三角関数」ともどしたが、「円」へのこだわりは捨てていない。　また、グラフによる関数の理解　という視点も重要視しているが　「動き回るグラフ達②」において、三角関数のグラフによるアプローチは行ってしまった。そちらを参考にしてほしい。

また、必要にかられて、初歩的な「ベクトル」に触れているが、いい加減な取扱いなので「ベクトルと線形空間①」(何という名前になるかは、まだ決めていない)を参照してほしい。

1. ベクトル

1) 座標とベクトル

数学の教科書では、ベクトルとは「大きさと方向(向き)をもつ量」とか「有効線分AB」のことであるなどと物理学あるいは幾何学の概念によってベクトルを定義するのが普通であり、歴史にもそっている。だが、ここでは「代数的定義」により、ベクトルの概念を導入しよう。　その手本となるのは、座標平面・空間における点の座標(x, y)や(x, y, z)である。

○ベクトルの定義

2個、あるいはもっと多数の「数」の集まりをひとまとめにし、次のように書いてベクトルという。

2次元(平面)ベクトル	3次元(空間)ベクトル	n次元ベクトル
$\mathbf{a}=(c,d)=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$	$\mathbf{a}=(x,y,z)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3,\cdots a_n)=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}$

上のように、横書きにしたものは、点の座標による表示と同じで形である。
これを「横ベクトル」　縦書きにしたものを「縦ベクトル」　と呼ぶが、計算の都合上縦横に配置しただけだ、　n個の要素(成分)をもった量といういみで　両者はまったく同じと考えてよい。　カッコの中の数達を　ベクトルの成分　というが、この個数が　n個の場合　n次元ベクトル　という。　成分をあらわす文字は上のように自由だが、　成分の個数が多かったり、どのベクトルの成分かを明示したような場合には、右のように　a　の「足」に例えば　1, 2, 3　と添え字をつけて記述すると便利である。

また、ベクトルそのものは、成分と間違わぬように　「**太字**」であらわすことにする。おなかに、いっぱい数　がつまっている感じで　筆者の好みである。

今後簡単のために　断りがない場合は　2次元のベクトル(平面ベクトル)　で
縦ベクトルを主に説明していく。

ただし、断りなしに、紙面の都合でいきなり、横ベクトルをつかったり、空間や
n次元ベクトルに話を跳躍させることもあるかもしれない。

2) ベクトルの算法

さて、ここまではベクトルが定義されただけで、その間に何の規則も定まっていない。
「数」は、その間に ＋ や × で表される「算法」が定義され、 ＝ や 大小の関係が定められているからこそ、「計算」ができるのであった。

我々の「新しい数学的量」である、「ベクトル」に対しても、同様の演算を定義しなければ何の意味もない。 注意したいのは、あくまで「定義」するということである。
現実的にそこに何かの意味をもたせることは必要ではない。（もちろん、うまく対応する現実がでてくるように巧妙に、下心をもって定義していくのだが。）

お手本にするのは、もちろん「数」である。「数」の中でも「複素数」は二つの成分をもつ量であるので良い見本となる。

以下 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 　 $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ とする。

○相当 （＝）

ベクトルはその対応する成分がすべて等しいときに 「等しい」と呼び 「＝」で表す。

$a=c$ かつ $b=d$ であるとき $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ とする。

○加法

各成分どうしの、加法・減法により ベクトルの足し算 引き算が数と同じ記号 ＋ － を用いて定義される。

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c\\b-d\end{pmatrix}$$

○ 零ベクトル

数の足し算において もとの数を変えない 特別な数を 0 という。 このような働きをするベクトルを 零 ベクトルと呼ぼう、これは すべての成分が0であるベクトル

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

である。 零ベクトル $\mathbf{0}$ （太字）は数の 0 とは異なるので注意する必要がある。

ベクトルと区別して ただの数を呼ぶ時 「スカラー」と呼ぶ。

○逆ベクトル

正の数に対する 負の数を 逆元というが、ベクトルにおける逆元 すなわち逆ベクトルは

$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ の逆ベクトルは $\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$ であり $-\mathbf{u}$ と書く と定める。

こうして定められた、ベクトルの　足し算では　数の場合と同じように

交換法則　$u+v=v+u$　　結合法則　$(u+v)+w=u+(v+w)$

がなりたつ。　よって、

ベクトルの足し算は「数」の足し算と全く同じようにおこなうことができる。

○ベクトルの掛け算

ベクトルの掛け算も数と同じようにできるのだろうか。　残念ながら、数と同じ性質をもつ「掛算」をベクトルに対して定義することはできない。　いろいろと試みられたが、少くとも　一般的な　n次元ベクトルに対しては、不可能である。　次の2種類の積が考案されたが、いづれも「数」における積ほど自由度はない。　それらは「内積」と「外積」とよばれ　次のように定義される。

内積　「・」で記され　$u\cdot v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=ac+bd$　横どうしを掛け合計をとる

外積　「×」で記され　$u\times v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=ad-bc$　クロスで掛け合わせ引き算

内積に関しては　演算の結果が「数」になって、ベクトルに戻っていない。　この時点で「積」としては不備である。　しかし「交換の法則」　$u\cdot v=v\cdot u$　は満たしている（計算してみよ）

外積に関しては、二次元の外積は　ベクトルにもどっていないが、三次元以上であればベクトルになるようにできる。　ところが　「交換の法則」が成り立っていない。 $u\times v=-v\times u$ 実際計算してみるとわかる。　逆順でかけると「－」になってしまう。

いづれも、数の「積」　とは異質のものである。　それでは、これらの「積もどき」は　不要なものかというと、それはそれで立派な役目をになっている。　あとでわかるだろう。

積と和の間の法則　「分配法則」　は立派に成り立っている。

内積	$u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$
外積	$u\times(v+w)=u\times v+u\times w$

これはすごい

ところで3次元での演算では　内積の結果は　「スカラー」　になり　外積は「ベクトル」に戻る。このことから、応用の分野では　内積のことを　「スカラー積」　外積のことを　「ベクトル積」と呼ぶことも多い。

（注）ちなみに　3次元ベクトルによる　内積と　外積の定義は次のとおりである

内積 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$　　　　外積 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$

○数とベクトルの積

さて、これで　ベクトルどうしの演算は終わりであるが、もうひとつ重要な演算がのこっている。

それは、スカラー（数）とベクトルの積である。

c　を普通の数とするとき　cと　ベクトル　$\mathbf{u}$　の積　$c\mathbf{u}$　を次のように定義する。

$$c\mathbf{u} = c \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca \\ cb \end{pmatrix}$$

スカラーとベクトルの積は　定義から明らかなように　ベクトルになる。

$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$　　　　　$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

○ベクトルの大きさ

さてベクトルに数と同じような大きさを持ち込むにはどうしたらよいであろう。「複素数」をお手本にしよう。

すでにみたように　複素数そのものを　＜　、　＞　の概念で比較することは不可能であった。

（　z_1　z_2　が二つの複素数のとき　$z_1 < z_2$　などという書き方はできなかった）

ただ　$z = a + bi$　とするとき　zの大きさ　$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$　で定義してこの値で2者を比較する

ことは可能であった。そこでベクトルにも「大きさ」と呼ばれる量を複素数と同様に定義してやろう。

ベクトル　$\mathbf{u}$　の大きさを　$|\mathbf{u}|$　と書き

$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$　　と内積を使って定める。　成分でかくと

$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$　　となる

これはスカラーである。　$|\mathbf{u}| = u$　と簡略化して書くことも多い。

○単位ベクトル

ベクトルの大きさが決まったので　大きさ $|\mathbf{u}| = 1$　のベクトルを　単位ベクトル　と呼び

$\mathbf{e}$　と書こう。例えば次のベクトルは単位ベクトルである。

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，　$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　，$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{0}$ベクトルをのぞく任意のベクトルから　単位ベクトルを作ることができる。

任意のベクトルがあるとき、大きさを調べ　その大きさで自身を割ってやるのである

$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ なら　$|\mathbf{u}|=\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$　の逆数を　$\mathbf{u}$にかけて　$\boxed{\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \cdots ①}$

とする。実際　①の内積を計算すると

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}(a^2+b^2)=1$$

となり　$|\mathbf{e}|=\sqrt{\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}}=1$　である。

○ベクトルどうしの関係

　c　をスカラーとして　　$\mathbf{v}=c\mathbf{u}$　と書けるとき　$\mathbf{v}$の大きさは　$\mathbf{u}$の大きさの　c倍である。

$|\mathbf{v}|=c|\mathbf{u}|$　　または　簡略化して　　$v = cu$

とくに　$\mathbf{u}$　を単位ベクトル　$\mathbf{e}$　とすると

$|\mathbf{v}|=c|\mathbf{e}|=c$

$\boxed{\mathbf{v}=c\mathbf{u}\text{　と書けるとき　}\mathbf{u}\text{と}\mathbf{v}\text{　は「平行である」と呼ぶ。}}$

$\boxed{\text{また、}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0\text{　のとき　}\mathbf{u}\text{と}\mathbf{v}\text{　は「垂直である」と呼ぶ。}}$

$\boxed{\text{平行な場合　}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\pm uv\text{　　となる。}}$　(注)逆向きの場合に　$-uv$　となる

左辺は内積　右辺は普通の数値の積であることに注意。

平行　垂直などという幾何学的用語を使ったが、論理は純粋に代数的であり、具体的な幾何学的概念は何も使用していないことを注意しておく。

○線形結合

ここまでやってきたことは、次の事実を示すためである。

k_1, k_2をスカラー　$\mathbf{u}, \mathbf{v}$をベクトルとしたとき次のような形式

$$k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{v}$$

を　$\mathbf{u}$　と　$\mathbf{v}$　の「線形結合」という。

> 0でないベルトル　$\mathbf{u}$　と　$\mathbf{v}$　が平行でない場合　k_1　k_2を適当に定めると
> 2次元のすべてのベクトル　$\mathbf{w}$　は　$\mathbf{u}$　と　$\mathbf{v}$　の線形結合として
>
> $$\mathbf{w}=k_1\mathbf{u}+k_2\mathbf{v} \quad \cdots ①$$
>
> と表すことができる。

①でk_1　k_2　を　x, y　とかくと

$$x\mathbf{u}+y\mathbf{v}=\mathbf{w} \quad \cdots ②$$

$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$　　$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$　　$\mathbf{w}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$　　とすると　②は

$$x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$ より $$\begin{pmatrix}ax\\bx\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}cy\\dy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$ さらに

$$\begin{pmatrix}ax + cy\\bx + dy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$ 各成分ごとにわけて書くと

$$\boxed{\begin{cases} ax+cy=e \\ bx+dy=f \end{cases}}$$

という2元の連立方程式になる。この連立方程式が解けてただ一組の解をもつと
いうことが ① が成り立つことと同値である。 じっさいこの連立方程式は解ける。

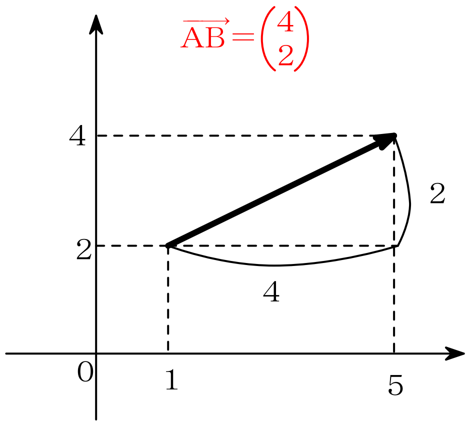
3) ベクトルの幾何学的意味

ここまでは純粋に代数的な概念としてベクトルを考えてきた。 関数が幾何学的なグラフを
とおして見えてくるのと同じように、ベクトルも幾何学的対応物をあたえると人間に見えやすく
なる。 しかしながら、対応物は ベクトル代数の法則を満たすものなら「何でもいい」のである。
このことを忘れないようにしよう。 たとえば進んだ数学を使えば sin や cos などの関数を
ベクトルと見なすこともできるのである。

さてもっともよく使われるのは 平面上の有向線分 $\overrightarrow{AB}$
である。このときベクトルの成分は、右図のように有向線分の
始点と終点の座標成分の差と定義される。

一般にベクトルは 「大きさと方向をもつ量」と定義される
のはこの「有向線分」のイメージからきている。

0 ベクトルは大きさも方向もなく、一点を表すのみである。



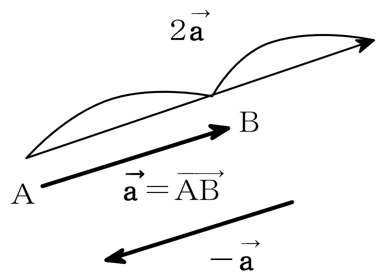
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$

有向線分の始点を原点に固定した場合，ベクトルは終点
の座標と一対一対に対応する。 このようなベクトルのことを
位置ベクトルといい、座標と同義に使われる。

ベクトルの大きさは、三平方の定理より まさに 有向線分の長さに等しくなる。
また、単位ベクトルは 長さ 1 のベクトルであり 逆ベクトルは 反対向きの同じ大きさのベクトルを
しめす。 すなわち $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

ベクトルのスカラー倍 $c\overrightarrow{AB}$は cが正の場合は同じ向き、
負の場合は逆向きに c 倍した有向線分を表す。

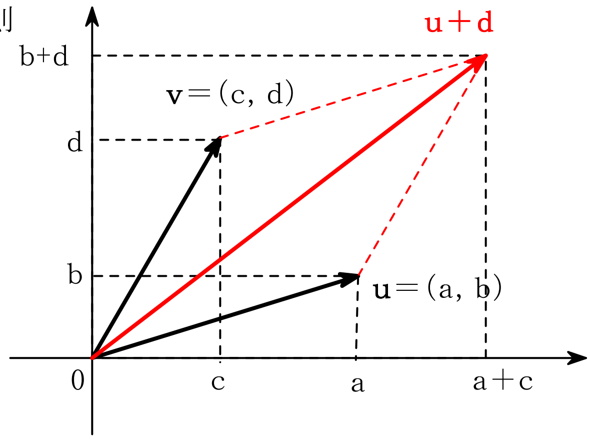
$c=0$ の場合は 点である。



ここで、一般のベクトルでは始点と終点の位置関係のみ
で成分が決まるので 平行移動によって移りあうすべての
ベクトルは同じものとみなされることを注意しておく。すな
わち「大きさと向きが等しいすべての有向効線分は同じベクトルを表す」ということになる。
有向線分 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ などと 1文字で表す場合、幾何ベクトルを強調するときは 上に→をつけてよい。

○　ベクトルの和と差

二つの幾何ベクトルの和と差は、平行四辺形の法則を基本とする。この結果が成分で定義した、和・差の定義と同じであることは、図より明瞭である。



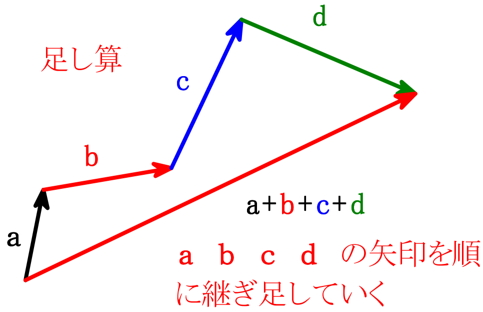
差　**u－v**　を作図する場合は　**u**　に　**v**の逆ベクトル　**－v**　（大きさ同じで反対向きのベクトル）を、やはり平行四辺形の法則をつかって合成してやればよい。

○和と差の実用的な作図

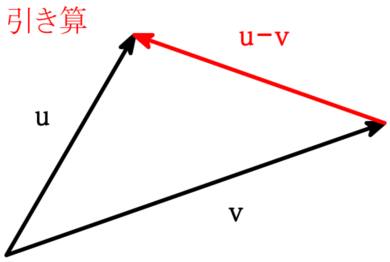
平行四辺形の法則による作図は基本であるが多数のベクトルの和をとるときに、この方法をつかうと、面倒である。　そこで、右のような、やり方をする。「継ぎ足しの法則」とでも呼ぼうか。
これは、ベクトルは

好きな位置に並行移動することができる

という性質を利用して、平行四辺形の法則を簡便化したものである。



また、二つのベクトルの差についても、右の方法を使うのが普通である。これも、やはり平行移動を使って、作図しやすい位置にベクトルをずらしたものである。



（注意）この作図は簡単であるが、u－v　のベクトルの矢印の方向を間違うことが多い。次のように覚える

u－v　なら　順に　**u,**　**v**　を書いて、そのままペンを離さずに **u**、**v**　を結ぶ線を引き　その最後に　矢印をつける

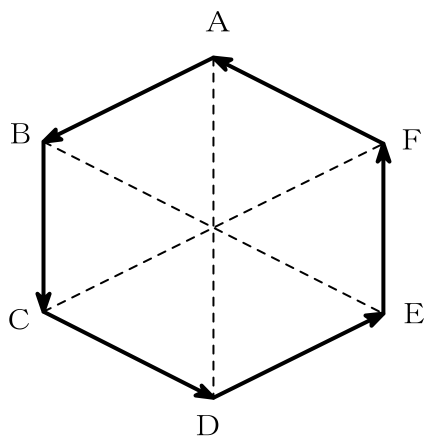
（例）　次の6角形の各辺に相当するベクトルを合成せよ

$\overrightarrow{AB}$　$\overrightarrow{BC}$　$\overrightarrow{CD}$　$\overrightarrow{DE}$　$\overrightarrow{DF}$　$\overrightarrow{FA}$　　を

継ぎ足しの法則で順に足し算すると

$\overrightarrow{AA}$　という　一点にもどる。　すなわち

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FA} = \vec{0}$



ベクトルが有向線分　$\overrightarrow{AB}$　の形で表わされているときは、加法に関する次の簡単な規則が使える。

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}}$$

文字がうまくつながるように足し算すると最初と最後の文字のみがのこる。

○内積と外積

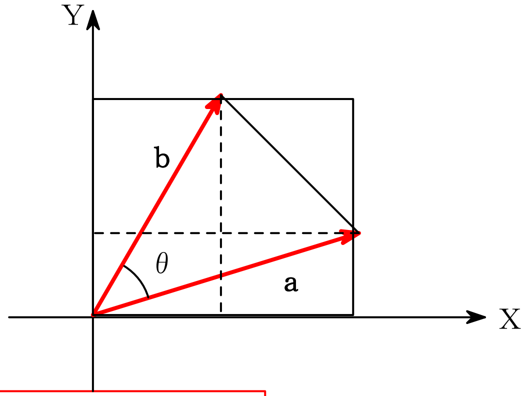
右のように大きさa，bであるベクトル **a** ，**b** があったとき

aから**b**へ測った角をθとすると

abcosθ ・・・① が内積 **a**・**b** を
absinθ ・・・② が外積を **a**×**b** を

与える。

幾何学的 内積・外積の定義



2つのベクトルが 平行のとき θ ＝0であるから

a・**b**＝ab ・・・③
a×**b**＝0 ・・・④

平行条件

また垂直のとき

a・**b**＝0 ・・・⑤
a×**b**＝ab・・・⑥

垂直条件

これらの式は、**0**でないベクトルに対する 「垂直条件」「平行条件」を与える。

また、①は 内積・・・ **a**と、**b**が**a**上に落とす「射影」との積

②は 外積・・・ a，bが張る平行四辺形の面積（a，bを辺とする三角形の面積の2倍）

という「幾何学的」な内容をもっていることを示している。 内積は 「物理学」の分野で力が作用線方向にもたらす分力を計算する場合などに便利に使用されるし、外積は「電場」や「磁場」の中を進む荷電粒子に働く力を計算する場合に欠かせない。また、純粋な幾何学としても、各頂点の座標がわかっている場合の三角形の面積をもとめる大変便利な公式を与えている。

○代数的定義と幾何学的定義

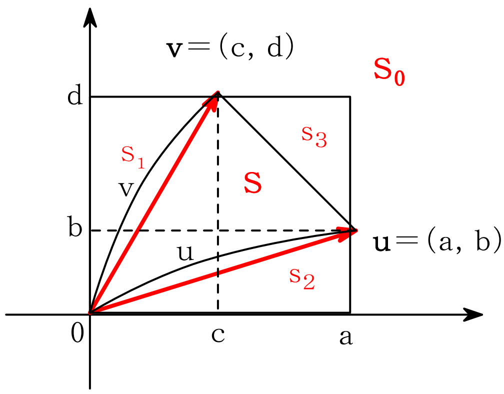
それでは、ふたつの定義が結局は同じものであることを証明しよう。

まず $\mathbf{u}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ としたとき

外積 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ＝ uvsinθ ＝ad－bc ．．．①

が成り立つことをしめす。

右図では、座標との関連で見やすくするために
横ベクトルの表示を使っている。



$\frac{1}{2}$ubsinθ は 右図のように u v を二辺とした三角形の面積である。これを S とする。

これは、正方形の面積 S_0＝ad

より $s_1=\frac{1}{2}cd$ $s_2=\frac{1}{2}ab$ $s_3=\frac{1}{2}(a-c)(d-b)$ を引いたものである

よって $S=S_0$ － $(s_1+s_2+s_3)$ ＝ $\frac{1}{2}(ad-bc)$ 実際計算してみよ

これより uvsinθ ＝ad－bc ・・・・① をうる。

次に　**内積**　$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$　＝　ac＋bd　・・・・②　　　が成り立つことをしめす。

①の両辺を2乗する。

$u^2v^2\ \sin^2\theta = (ad-bc)^2$・・・③　　　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$であるから　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

よって

$u^2v^2(1-\cos^2\theta)=(ad-bc)^2$　　移項して整理すると

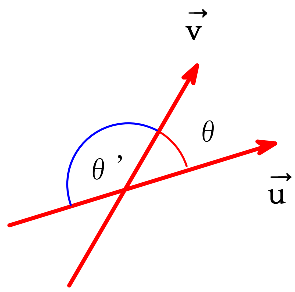
$u^2v^2\cos^2\theta=u^2v^2-(ad-bc)^2$　　　　$u^2=a^2+b^2$　　$v^2=c^2+d^2$　であるから

$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ad-bc)^2$

$=(ac+bd)^2$　　　計算せよ

これより

$\boxed{uv\cos\theta = \pm(ac+bd)}$



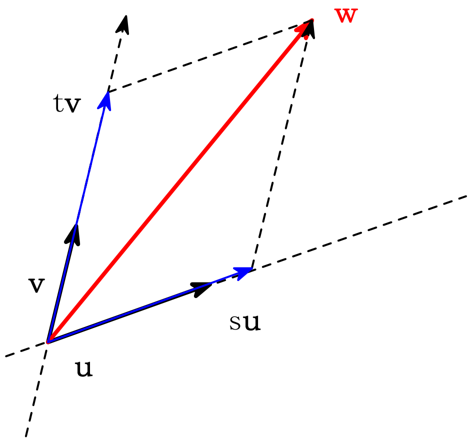
±は　θをどこにとるかという問題に起因する。右図のごとく定めると　符号まで含めて解決する。

$\boxed{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = uv\cos\theta = ac+bd}$

こうして、幾何ベクトルについても内積・外積の成分による代数的算法が適用できるようになった。

○線形結合

線形結合の幾何学的意味は右図のとおりである。



w　ベクトルを右図のように平行四辺形の法則で**u**　と　**v**　ヴェクトルに分解したものが線形結合

$\mathbf{w}=s\mathbf{u}+t\mathbf{v}$　　・・・①

である。 **u**　と　**v**　が平行でない場合　この分解は必ず1通りにきまる。 すなわち線形結合の一意性が保障される。**u, v**　を成分で表して

$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$　　$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$　　$\mathbf{w}=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$　とする。 そのとき線形関係

$x\mathbf{u}+y\mathbf{v}=\mathbf{w}$　・・・②　は

$\begin{pmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$　・・・③　という連立方程式をあたえることは、すでにみた通りである。

このとき**w**の分解　①　によって得られる　2つのパラメータ　s　t　が実は連立方程式③の解となる。 つまり　$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$　の二つのベクトルが平行でない場合、すなわち

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$　でない場合には、 連立方程式　③は上記の作図を利用して必ず解けることがわかるのである。

この連立方程式に関する理論は　3次元　・・・n次元　へ容易に拡張することができる。
ただ、この場合　上のような　平行条件だけでは簡単に判定できない。このためにはベクトルの「線形独立」の概念が必要になってくるのであるが、いささかこのペーパーの範囲を超えるので取り扱わないことにする。

○基底

ゼロでなく、平行でもない　**u**　と　**v**　ベクトルで、任意のベクトルを線形結合の形に分解することができた。このとき　**u**　と　**v**　を直行する単位ベクトルとしてやると、非常に都合が良い。

このような単位ベクトを　$\mathbf{e}_1$'　と　$\mathbf{e}_2$'　としよう。 そのとき、**w**の　$\mathbf{e}_1$'　$\mathbf{e}_2$'　への射影を　s$\mathbf{e}_1$'　t$\mathbf{e}_2$'　とすると　**w**＝s$\mathbf{e}_1$'＋t$\mathbf{e}_2$'　、s t は

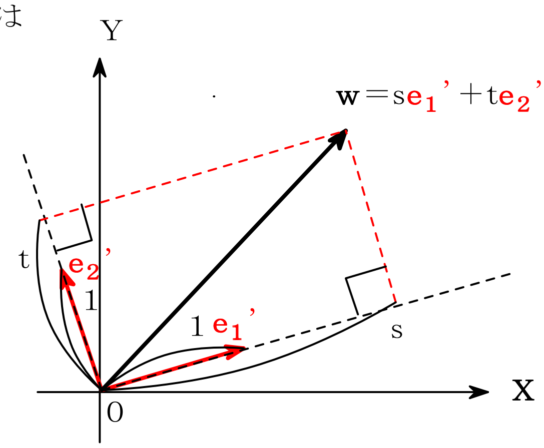
s＝**w**・$\mathbf{e}_1$'　t＝**w**・$\mathbf{e}_2$'　で簡単に計算できる。

この　s、t　を　基底　＜$\mathbf{e}_1$', $\mathbf{e}_2$'＞　に対するベクトル　**w**　の成分とよぶ。

そうして、もとの　X－Y軸に関する　成分

$\mathbf{w}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$　と同じように　この基底にたいして

w　を　$\mathbf{w}=\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$　とかくことができる。

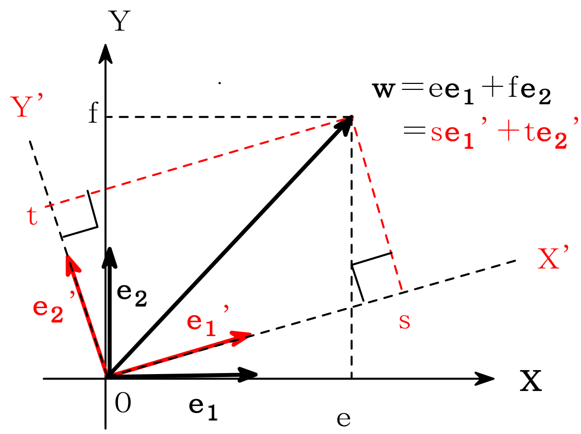


すなわち基底　＜$\mathbf{e}_1$', $\mathbf{e}_2$'＞は　一つのあたらしい　X'－Y'座標系を与えたものと解釈することができる。そこで、われわれは古くから使っている　「直行座標系」を　この　新しい解釈を使用して

$$\boxed{\text{直行座標系とは、直行する単位ベクトル　}\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle\text{の組のことを意味する。}}$$

と言い換えてもよいであろう。 つまり、われわれの通常使っている座標系は

$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　　$\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　という二つの単位ベクトルが作る基底＜$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$＞による表示であったのである。 これと同等な新しい基底　＜$\mathbf{e}_1$', $\mathbf{e}_2$'＞をつくりこの基底によって、ベクトルの成分表示をおこなうこともできる。 こうして、いわゆる　線形空間の座標変換の理論へと導かれるのだが先走りは、このへんでやめておこう。



$\mathbf{w}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$　　$\mathbf{w}=\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$

2.　三角関数

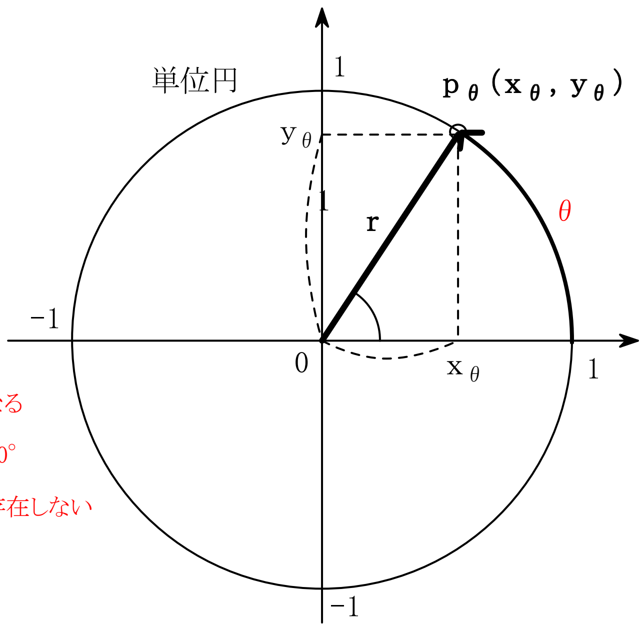
　さて、長いことベクトルの説明に費やしたが、ここで三角関数（円関数）にもどろう。
三角関数の定義は、ベクトルの言葉を使うと幾分見通しが良くなる。
もういちど　三角関数の定義を振り返ってみると、

1）三角関数の定義

三角関数の定義は次のように与えられた。

31°　三角関数は、単位円上を動く動転　p　の　X、Y成分および　動径　r　の傾き（＝y/x）のことである。

始線（X軸正方向）から測った角が θ である　動点　p　を　p_θ　、そのX, Y成分を　$p_\theta(x_\theta, y_\theta)$　と書く. 傾きは　$t_\theta = y_\theta / x_\theta$　とかく。



定義

$$x_\theta = \cos\theta$$
$$y_\theta = \sin\theta$$
$$t_\theta = \frac{y_\theta}{x_\theta} = \tan\theta$$

分母が0になる
θ ＝90°　270°
ではtanは存在しない

　ベクトル的にいうと　$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$　を始点を原点とし大きさ1　である「動径ベクトル」$\mathbf{r}$　とし　また $\mathbf{r}$　とX軸の正方向となす角を　θ　としたときに $\mathbf{r}$ の　x成分を　$\cos\theta$　y成分を　$\sin\theta$　とよぶ。
あるいは、X軸上の単位ベクトルを　$\mathbf{e_x}$　Y軸上の単位ベクトルを　$\mathbf{e_y}$　とするとき

$\cos\theta = \mathbf{r}\cdot\mathbf{e_x}$ … ①　　　$\sin\theta = \mathbf{r}\cdot\mathbf{e_y}$　…②

と内積による定義もできる。当然のことながら、ここでの内積演算は代数的演算である。
　内積　外積　ともに　代数的演算も幾何的演算も同値であるので、今後場面に応じて都合の良いものを使い分けることにする。

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$ である

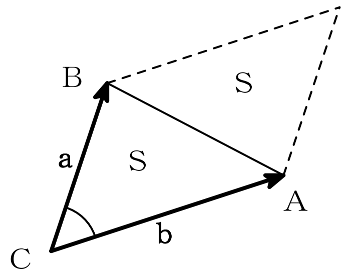
$\mathbf{r}$の大きさは今　1　としているので　$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 1$　すなわち

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

2) 面積公式・正弦定理と余弦定理

三角形の面積の公式

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B}\quad \cdot\cdot①$$



上の図で　$2S=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

は、二辺をベクトルと見たとき 「外積の定義」そのものである。［外積」は右図の平行四辺形の面積をあたえるから、三角形の面積はその半分になる。

$2S=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\ =ba\sin C$

他の辺の組み合わせでも同じ用にできるから①が成立する

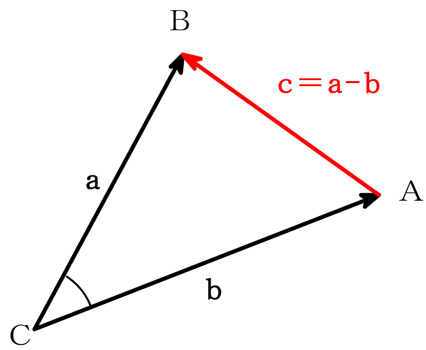
正弦(sinの)定理

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}\quad \cdot\cdot\cdot②$$

①を2倍して　abc　でわると

$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$$

これの逆数を取ったものが、正弦定理　②である。



余弦定理(cosの)定理

$$\boxed{\begin{array}{lll}\mathbf{a}^2 & = & \mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{bc}\ \mathrm{Cos}A\\ \mathbf{b}^2 & = & \mathbf{c}^2+\mathbf{a}^2-2\mathbf{ca}\ \mathrm{Cos}B\\ \mathbf{c}^2 & = & \mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{ab}\ \mathrm{Cos}C\end{array}}\quad \cdot\cdot\cdot③$$

三角形の各辺を　ベクトル　$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$　とみなすと

辺$\mathbf{c}$　は$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$の差として　　$\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$　と書ける。

$c^2=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$　であるから

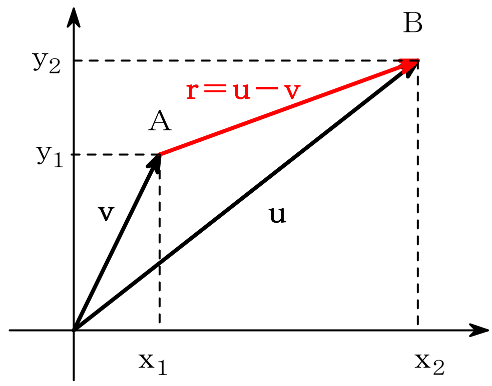
$$\begin{aligned}c^2 &= \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})\\ &=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\ &=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\ &=a^2-\ 2ab\cos C+b^2\end{aligned}$$

これを並べなおすと③をうる。

2点間の距離の公式

$$\boxed{r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

これも右図より明らかであろう。



$$\mathbf{r}=\mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{pmatrix}$$

$$r=|\mathbf{r}|=\sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

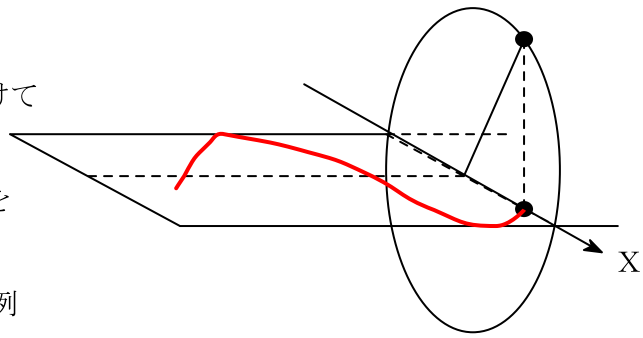
3) 三角関数のグラフ

三角関数 sin や cos のグラフは、単位円上の動点 $p(x_\theta, y_\theta)$ の x_θ、y_θ の値を 角 θ に対してプロットしたものである。

簡単にいうと、自転車の車輪に豆ランプをつけてくるくる回すと 豆ランプが円形に回転する。この車輪を真横から眺めると、ランプは直線上を行ったり来たりするように、みえる。

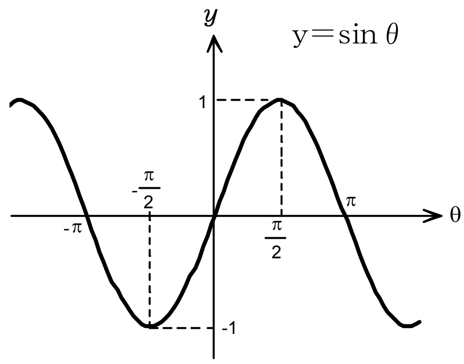
このランプを地震計の針にみたてて、θ に比例する速度で引っ張り出した記録用紙にインクで書きとめると、きれいな波形ができる。これが、sin やcosのグラフである。 この波形は一般に正弦波（サインカーブ）とよばれる。

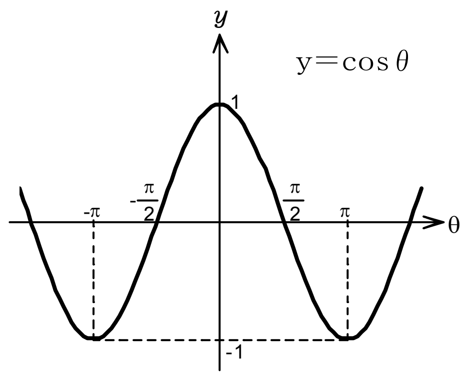
これは、次のような波になる



正弦波のグラフ

下図の縦軸には y_θ x_θ を取るべきだが一律に y としてある。





グラフを比べてみると、

sin θ と cos θ のグラフでは θ 方向に $\pi/2$ のずれがある。

このような角のずれは「位相のずれ」と呼ばれる。

$y=\cos\theta$ のグラフが $y=\sin\theta$ より 左に $\pi/2$ だけずれているので式で表すと

$\cos\theta = \sin(\theta + \pi/2)$ ・・・①

となる。

符号が逆のように思われるかもしれないが、このあたりは「動き回るグラフ達①」を参照してほしい。 「反変的」変換の結果である。

①式により、cos はいつでも sin から求めることができる。 また、逆も可能である。

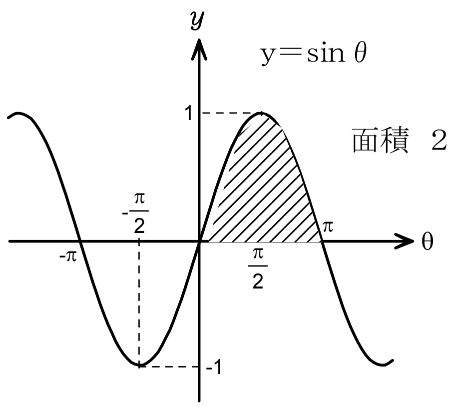
$y=\cos\theta$ は 左右対称なグラフをもち （ 遇関数 $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ）

$y=\sin\theta$ は 原点対称なグラフをもつ。 （ 奇関数 $\sin(-\theta)= - \sin\theta$ ）

振幅は 1 で 周期が2πの周期関数であることは いずれも同じである。

○グラフの面積

微積分学の内容になるが、正弦波の一山の面積が2であることは、覚えておくと便利である。（ 0〜π/2 までは 1 ） また

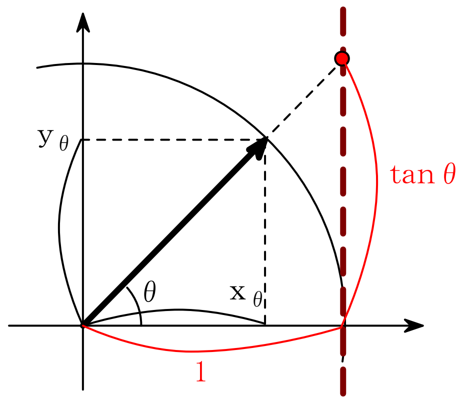


y＝2sin θ なら 4 ・・・縦に2倍

y＝sin2 θ なら 1 ・・・横に半分

とグラフの拡大・縮小にともなって、面積も変わることを覚えておこう。

○ y＝tan θ のグラフ

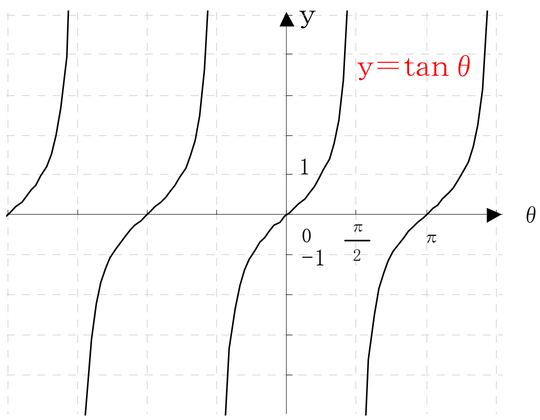


$$x_\theta : y_\theta = 1 : \frac{y_\theta}{x_\theta}$$

y＝tanのグラフは $\tan\theta = \dfrac{y_\theta}{x_\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

という比であるので、グラフを書きにくいが右の図のように、分母が 1 になるまで拡大すると、 右のついたてにできる○の位置が tan θ の値を与える。

この値をやはり、トレース用紙に映すと右のような y＝tan θ のグラフをうる。



右の図でわかるように、θ＝0 のとき tan θ も 0 であるが、 45°（π/4）では ちょうど 1 θ が 90°（π/2）に近づくにつれて急速に大きくなっていく。

θ＝90° では無限大に発散して値を持たない。

θ が 負のときは tan θ の値も負となるが −90° で負の無限大に発散することは同じである。 また、90° をこえたところでは、x_θ の値が負になるので、$\tan\theta = \dfrac{y_\theta}{x_\theta}$ の値も負になる。 その結果グラフにあるように、 −90° 〜90° までのパターンを繰り返す。すなわち、周期 π の周期関数になる。

グラフは原点対称であるので 奇関数 tan(−θ) ＝ −tan θ である。

π/2の奇数倍の位置に不連続点をもち、値域は −∞ から ＋∞ にわたる広領域をカバーしているところが、特徴である。 このため、レンジの大きい変動を取り扱うときに、便利に利用される。

4) 加法定理

三角関数の最重要定理はなんといっても加法定理であろう。 すでに 「動き回るグラフ達②」で加法定理とそれにまつわる公式群にはふれている。それにもかかわらず、ここではしつこく加法定理を追いかけ回してみよう。

加法定理

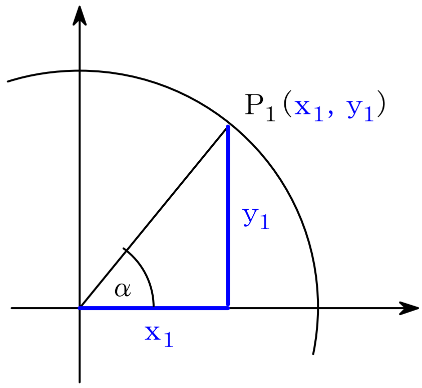
8°

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta\ +\ \cos\alpha\sin\beta$ ･･･ ①

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\ -\ \sin\alpha\sin\beta$ ･･･ ②

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ･･･ ③

○加法定理の証明 1



右図のように、始線から α だけ回転した単位円上の動点を $P_1(x_1, y_1)$ とする。

ここで $x_1=\cos\alpha$ $y_1=\sin\alpha$ ･･･①

である。 この点をさらに β だけ回転させる

このときの P_1 の 座標を (x, y) とすると

$x=\cos(\alpha+\beta)$ $y=\sin(\alpha+\beta)$

である。 まず sin について考察しよう

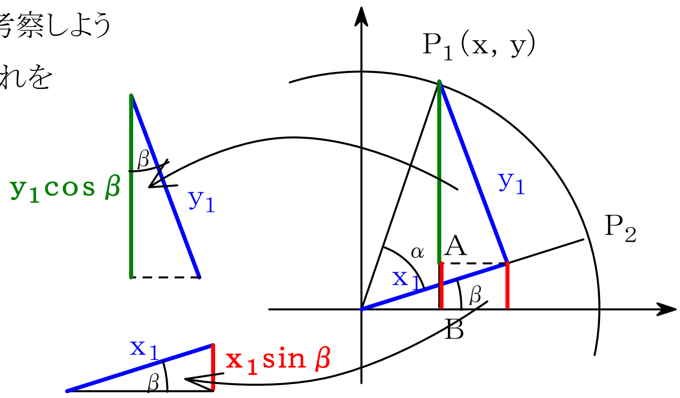
右図で $y=P_1B$ であるがこれを

$P_1B=P_1A\ +\ AB$

と分割して考えよう

右にとりだした三角形から

明らかなように



$P_1A=y_1\cos\beta$

$AB\ =x_1\sin\beta$

①により y_1 x_1 を書き換えると

$y=\sin(\alpha+\beta)=P_1B=P_1A+AB=y_1\cos\beta+x_1\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

これより加法定理の最初の公式をうる。

$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

cosについての公式も同様にして求められる。 また、 $\cos\theta\ =\sin(\theta+\pi/2)$ の公式によって sin の公式から導いてもよい。(「動き回るグラフ達②」参照)

また、tan に関する公式も $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ よりすぐに求めることができる。(やってみよ)

○加法定理の証明　２

平面の回転(「動き回るグラフ達②」参照)　により

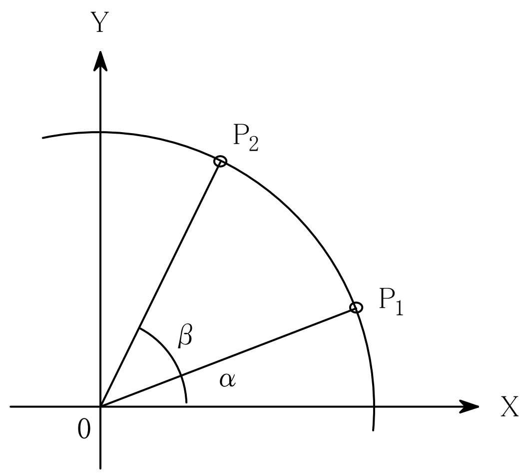
求めてみよう。

単位円上の　始線より　α　だけ回転した点を

$P_1(x_1, y_1)=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ とする。

この点に　さらに　β の回転をあたえた点を

$P_2(x_2, y_2)=(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$



平面の回転の公式より

$$x_2=\cos\beta\cdot x_1 - \sin\beta\cdot y_1$$

$$y_2=\sin\beta\cdot x_1 + \cos\beta\cdot y_1$$ よって

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

並べ替えれば　加法定理をうる

○　加法定理の証明　３

おなじことであるが、行列の計算を知っているものとして、回転の行列　$R(\theta)$

を直接計算してみよう。

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$ より

$$R(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\qquad R(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$ よって

$$R(\alpha+\beta)=R(\alpha)R(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$$

左右の行列成分を比較すると　加法定理をうる

○加法定理の証明　４

せっかく　ベクトルを勉強したので　基底ベクトル

を使って考えてみよう。

単位円上に　始線から　$\alpha+\beta$ だけ回転した

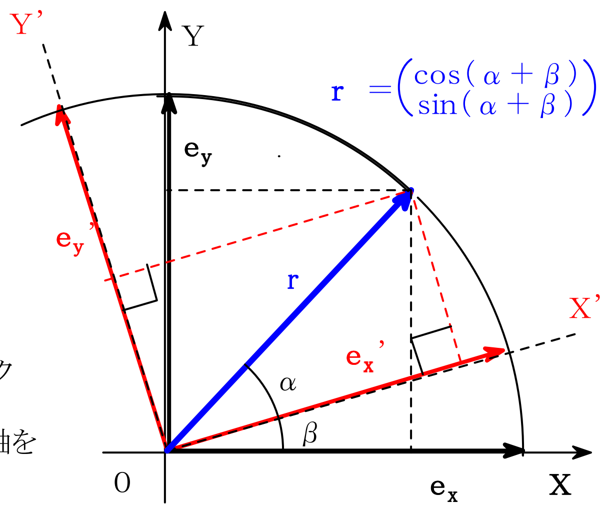
動径ベクトル　$\mathbf{r}$　があるとする。

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$ X－Y座標軸上の基底ベク

トルを$<\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}>$　それより β だけ回転した座標軸を

X’－Y’座標軸としてその基底ベクトルを

$<\mathbf{e_x}', \mathbf{e_y}'>$とする。　右図からすぐわかるように



$$\mathbf{e_x}'=\cos\beta\,\mathbf{e_x}+\sin\beta\,\mathbf{e_y},\quad \mathbf{e_y}'=-\sin\beta\,\mathbf{e_x}+\cos\beta\,\mathbf{e_y}\quad\cdots①$$

r を ＜$\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$＞で展開すると

$\mathbf{r}$ = cos($\alpha + \beta$)$\mathbf{e_x}$ + sin($\alpha + \beta$)$\mathbf{e_y}$ ・・・・②

〈$\mathbf{e_x}'$,$\mathbf{e_y}'$〉で展開すると

$\mathbf{r}$ = cos α $\mathbf{e_x}'$ + sin α $\mathbf{e_y}'$　　$\mathbf{e_x}'$ $\mathbf{e_y}'$ を①を使って書き換えると

=cos α (cos β $\mathbf{e_x}$ +sin β $\mathbf{e_y}$) + sin α (−sin β $\mathbf{e_x}$+cos β $\mathbf{e_y}$)

=(cos α cos β −sin α sin β)$\mathbf{e_x}$ +(cos α sin β + sin α cos β)$\mathbf{e_y}$ ・・・③

これが②と等しくなるためには　各基底ベクトルの係数が同じでなければならない

よって　比較　整理すると　加法定理をうる

○　加法定理の証明　5

最後にもっともエレガントな複素数を使った証明を与えよう。 内容はしかし高度なものとなっているので、詳しくは数Ⅲを学習したあと見てほしい。

e^{θ} , cos θ , 　sin θ 　をマクローリン展開して比較すると

$e^{i\theta}$ = cos θ + i sin θ 　・・・①

となることがわかる。

$e^{i\alpha}$ 　$e^{i\beta}$ 　を掛け算すると

$e^{i\alpha}$ $e^{i\beta}$ = $e^{i(\alpha+\beta)}$ = cos($\alpha+\beta$) +$\mathbf{i}$sin($\alpha+\beta$) ・・・②

一方　左辺　=(cos α + isin α)(cos α + $\mathbf{i}$sin β)

=cos α cos β + $\mathbf{i}^2$sin α sin β + $\mathbf{i}$(sin α cos+cos α sin β)

=cos α cos β − sin α sin β + $\mathbf{i}$(sin α cos+cos α sin β) 　・・・③

②③の実部・虚部　を比較すれば　加法定理をうる

ここまで、加法定理の5つの証明をあげた。（ 「動き回るグラフ達②」でもうひとつの証明をあげている）

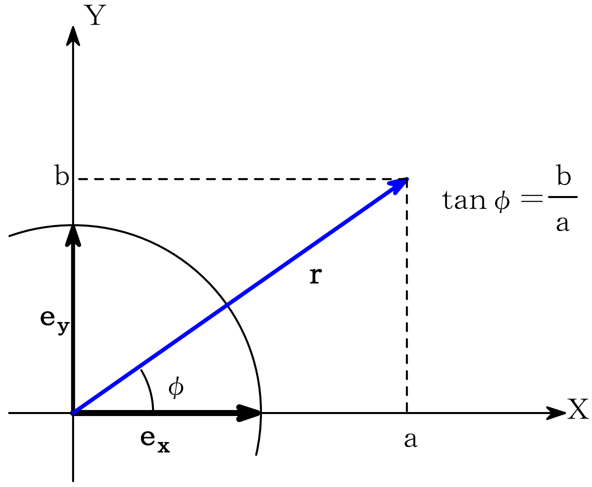
加法定理を証明することが目的ではない。 それぞれの手法を味わってほしいわけである。

目標は同じでも、山頂に到達する道は、このようにいろいろとあることを理解してほしい。

5)　三角関数の公式

三角関数の公式のグラフによるアプローチは「動き回るグラフ達②」でのべてあるので ぜひ見てほしい。

ここでは、ベクトルを主にしたアプローチをおこなう。



○合成公式

右の図のように　ベクトル　**r**は　X－Y座標系の基底ベクトル＜$\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$＞の線形結合として

$$\mathbf{r}=a\mathbf{e_x}+b\mathbf{e_y}$$

としてあらわされる。　すぐわかるように

$$r=|\mathbf{r}|=\sqrt{a^2+b^2} \quad \cdots ①$$

この全体が　θだけ回転して

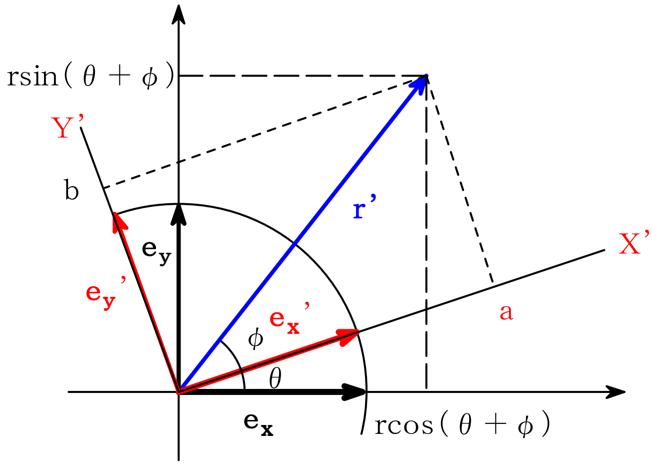
規定　＜$\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$＞が＜$\mathbf{e_x}'$, $\mathbf{e_y}'$＞

となったとする。その時　各基底ベクトルは成分表示すると

$$\mathbf{e_x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{e_y}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \cdots ②$$

$$\mathbf{e_x}'=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix},\ \mathbf{e_y}'=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix} \quad \cdots ③$$

である。



ところで、このとき　ベクトル　**r**　は

$$\mathbf{r}'=a\mathbf{e_x}'+b\mathbf{e_y}' \quad \cdots ④$$

に移される。 r'　の＜$\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$＞による表示は

右の図から

$$r'=\begin{pmatrix}r\cos(\theta+\phi)\\ r\sin(\theta+\phi)\end{pmatrix}$$　である。

④式の　$\mathbf{e_x}'$, $\mathbf{e_y}'$をそれぞれ　③で書きかえると

$$\begin{pmatrix}r\cos(\theta+\phi)\\ r\sin(\theta+\phi)\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\theta-b\sin\theta\\ a\sin\theta+b\cos\theta\end{pmatrix}$$

これより

$$\boxed{\begin{array}{ll} a\cos\theta-b\sin\theta=r\cos(\theta+\phi) & \\ a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\phi) & r=\sqrt{a^2+b^2}\quad \tan\phi=\dfrac{b}{a}\end{array}}$$

通常　下の式が　三角関数の合成公式として　教科書などに現れる。

これは、右辺に　加法定理を使えば、すぐ証明されてしまうが、ここではその本質をみるために、回転座標系による証明をこころみた。 グラフによる、波の合成・分解という視点も大事である。「動き回るグラフ達②」を見られたい。

○倍角の公式・半角の公式

2倍角の公式・半角の公式はいづれも加法定理からすぐにもとまる。
「動き回るグラフ達②」を参照されたい。ここでは公式だけを書いておく。

2倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

半角の公式

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

○ 積・和の公式　和・積の公式

積・和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

和・積の公式

$$\sin A + \sin B = 2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

左の公式で　$\alpha+\beta=A$　$\alpha-\beta=B$　とおいて書きなおせば　右の公式をうる。
左右どちらかを　しっかり覚えておけばよい。
これらの公式の意味は、「動き回るグラフ達②」に詳しいので省略する。

和・積の公式のほうが基本である。これは、周波数の異なった二つの波の合成を表している。
最初の式のみを説明する。　のこりは　$\sin(-B) = -\sin B$　や　$\cos A = \sin(A+\pi/2)$を
もちいて変形すればよい。

また、上の公式では異種の線形結合がないが、必要なら、いま述べた公式を使って
計算すればよい。結果はにたような式になるが、位相が$\pi/4$　ずれてあまりきれいな形
にならないので、公式としてはあげてないだけである。

この公式は　一般的な線形結合

$$s\cdot\sin A + t\cdot\sin B \quad \cdots ①$$

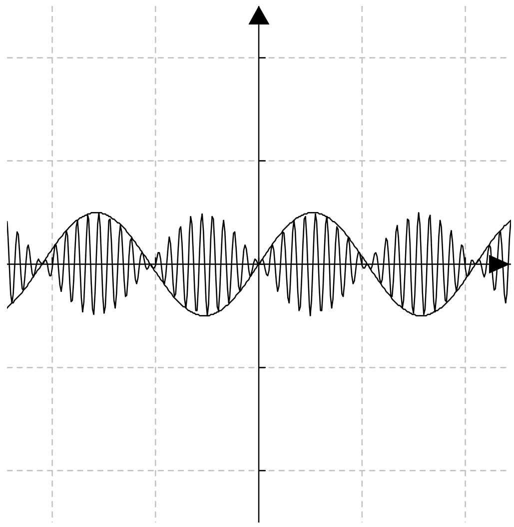
の形の　$s=t=1$　の場合である。　①のような一般的な結合の公式がほしいところであるが
まずは、簡単なものから始めよう。

周波数の異なった　2つの波を　同じ割合で合成したとき

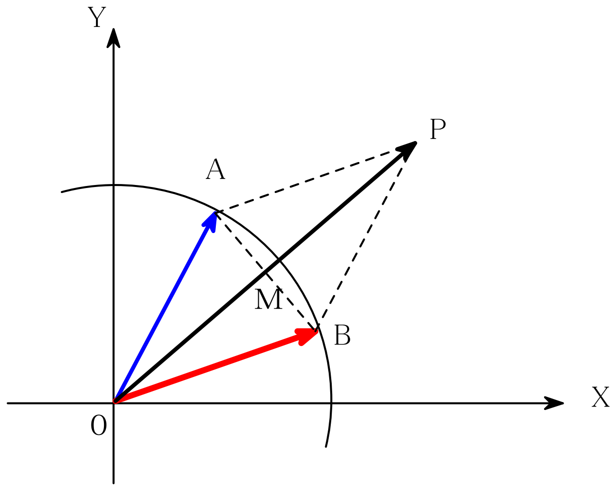
$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

合成波は右のように二つの周波数の平均で振動しながら、第2項によってその周波数の差に相当するゆるやかな振幅の変化を引き起こす。

いわゆる　振動数の近い周波数の音波がおこす「うなり」を表す。



右のように、単位円上で　A回転した点を　A　B　回転した点を　B　ベクトル　$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$　$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$　とする。



$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\cos A\\ \sin A\end{pmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}\cos B\\ \sin B\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$を合成した　$\overrightarrow{OP}$　を　$\mathbf{r}$　とすると

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\cos A\\ \sin A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos B\\ \sin B\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos A+\cos B\\ \sin A+\sin B\end{pmatrix}\cdots②$$

一方　□OBPA　は菱形なので∠AOP＝(A－B)／2　よって　$OM=OA\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{A-B}{2}$

より　$OP=2\cos\frac{A-B}{2}$

$\angle XOP=\frac{A+B}{2}$　であるから　$\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}$　の成分は

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix}OP\cos\frac{A+B}{2}\\ OP\sin\frac{A+B}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\\ 2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\end{pmatrix}\cdots③$$

②と③の成分を比較して順序を整理すると　和・積の公式

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

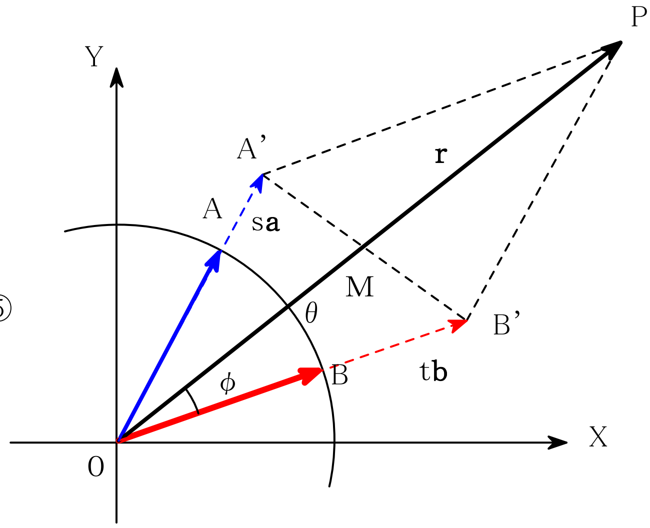
をうる。

さて　この例では　二つの波動の強さ（振幅）は同じである。　現実の世界ではこのようなことは
ほとんどな。2つの音源からの距離が等距離である場合など、特別な場合をのぞいては
ありえない。　そこで　「公式」の形でなく　違う強さの波の一般的な合成（線形結合）

$$s\cos A \ + \ t\sin B \quad \cdots ④ \quad s,\ t \text{ は自由な実数}$$

に興味がわくのである。

この場合の合成図は右のようになる。



$$\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}=t\mathbf{a}+s\mathbf{b}$$

$$=\begin{pmatrix} s\cos A+t\cos B \\ s\sin A+t\ \sin B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \cdots ⑤$$

ここで　r　は　OPの長さ

θ は　$\angle XOP$　でいずれも右の作図より

もとめられる。　　$\theta=B+\phi$

結果として

$$\boxed{\begin{aligned} &s\cos A+t\cos B=r\cos(B+\phi) \\ &s\sin A+t\ \sin B=r\sin(B+\phi) \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\cdots ⑥ \\ &\cdots ⑦ \end{aligned}$$

をうる。

r　と　ϕ　の計算式は　一般に複雑な形となる。　結果だけを表示すると

$$r=\sqrt{(s-t)^2+4st\cos^2\frac{A-B}{2}} \quad \cdots ⑧$$

$$\sin\phi \ =\frac{s}{r}\sin(A-B) \ =\frac{2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{r}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad \cdots ⑨$$

この式で　$s \fallingdotseq t$　であれば

$$r \fallingdotseq 2s\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \sin\phi \fallingdotseq \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad \text{故に}\quad \theta \fallingdotseq B+\frac{A-B}{2}=\frac{A+B}{2}$$

となり　⑥　⑦　は　和・積の公式に近いものになる。
すなわち「二つの波の強さが同程度であれば」　やはり「うなり」の現象があらわれることを
しめしている。

　この例をみてもわかるように、教科書における数学の公式は、その形が「きれい」に整理
できるものだけしか、あたえられない。　実用の場では、公式の「丸覚え」ではなく、その
公式の意味や、原理を理解しなければ適用できないことが多いことを覚えておいてほしい。

（注）　上の場合でも「作図」では何の難しさもない。これで「実測」して使う態度も大事である。

6）単振動

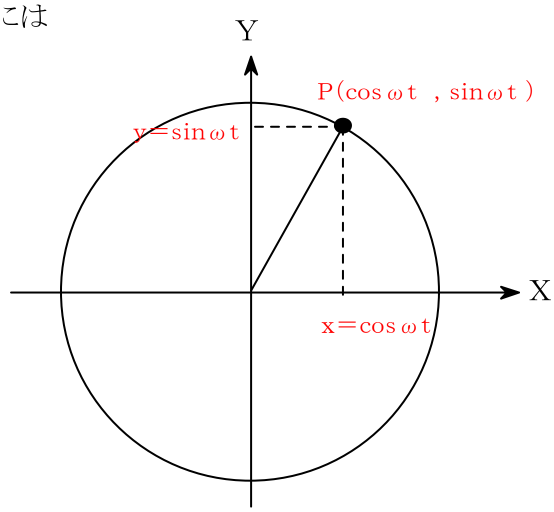
ここまで波とか、周波数とか振幅とか無造作に使用してきたが、その表現は必ずしも正しいものではなかった。ここで、物理的な概念である「単振動」と　三角関数の関係を整理しよう。時間とともに変化する関数を記述する場合、変数には　時間　t　を使用しなければならない。

いま、1秒間に5回転する点　P（x、y）　を表現するには

$$\begin{cases} x=\cos(2\pi\cdot 5)t & \cdots① \\ y=\sin(2\pi\cdot 5)t & \cdots② \end{cases}$$

$P(\cos(2\pi\cdot 5)t\ ,\ \sin(2\pi\cdot 5)t)$

と　t　を使って書かれる。



5のことを 「周波数（振動数）」という。　n　で表わされることが多い。また、1周が2π であるので周波数に2π を掛けるが、　この　**2πn**　のことを「角周波数」　とよび　**ω**　であらわす。

$y=\sin(2\pi nt+\phi)\ =\sin(\omega t+\phi)\ \cdots③$

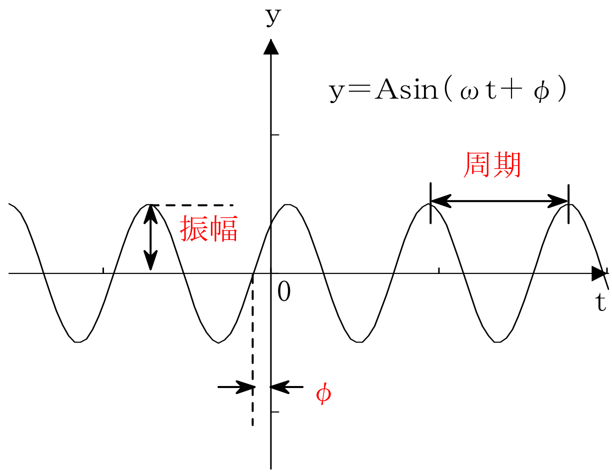
は周波数n　で　y　方向（縦）　に振動する点をあらわす。　ここでφは「初期位相」とよばれ　t=0　のときの　点P　の角を表す。

縦、あるいは横のこのような振動のことを「単振動」と呼ぶ。

この振動が空間を伝搬していけば「波動」ができるのである。

$\boxed{y=A\sin(\omega t+\phi)\ \cdots\cdot④}$

のグラフをt　を横軸に　y　を縦軸にとって書くと右のようにになる。



A　は波の高さ（山から谷までの半分）を表し「振幅」と呼ばれる。　山から山　あるいは谷から谷までの距離が　周期　T　である。

これは　振動数　n　と逆数の関係になっている。

$\boxed{T=1/n}$

また、横軸を　x　にとると、ある瞬間に空間を伝搬している「波動」のグラフとなる。

時間に対して、速度　v　ですすむ波動はグラフの平行移動の法則（「動き回るグラフ達」）を利用して

$y=A\sin(x-vt)$　・・・sin　の波が　右に　vt　だけずれていく。

などとかくことができる。

公式解説の際の「波動の合成」や「うなり」などの用語は、こういった伝搬する波のイメージによったものである。

7) 三角関数の微積分

○微分

三角関数の微分については　$y=\sin\theta$　の微分をしっておけばよい。

つまり

$(\sin\theta)'=\cos\theta$

$(\cos\theta)'=-\sin\theta$　・・・・

となっていくが、 微分によって、位相が $\pi/2$　だけずれていくということをおぼえておくとよい。

$(\sin\theta)'=\sin(\theta+\pi/2)$

である。 cos　は　本質的には　sin　と同じ関数の　位相が　$\pi/2$　だけずれたものであるから、sin　についても　cos　についても微分の公式は同じである。n回微分すると

$$\boxed{(\sin\theta)^{(n)}=\sin\left(\theta+\frac{n\pi}{2}\right)}$$

である。 このため　sin　も　cos　も　4回　微分すると　また元にもどるのである。

$\tan\theta$ の微分は　　$\tan'\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

である。 公式　$1+\tan^2\theta\ =\ \dfrac{1}{\cos^2\theta}$　との類似点が気になるところではあるがあまり深入りはしないことにする。

$\sin'2\theta=2\sin2\theta$

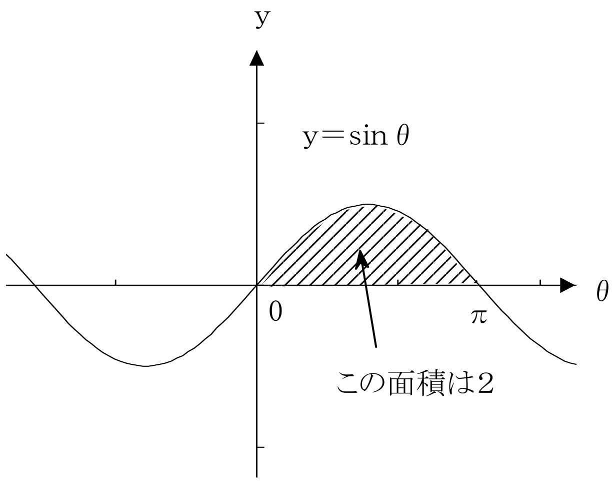
などの公式は、「横半分の縮小」によって、傾きは2倍になることから、すぐわかる。

これは、べつに三角関数に限ったことではない。

○　積分

積分にも深入りする気はないが、 すでにのべたようにサインカーブの一山が　2　とは（半山が1）であるこ覚えておいて、損はない。

また拡大・縮小による変形にともなって、面積もおなじ法則にしたがって変化するので　積分を改めて行う必要はない。



例えば　$\displaystyle\int_0^{\pi/2}3\sin(2\theta)\,dx\ =\ \frac{3}{2}\cdot2$

$=3$

である。

「三角関数（円関数）②」 終了