

動き回るグラフ達② その2

7) 三角関数

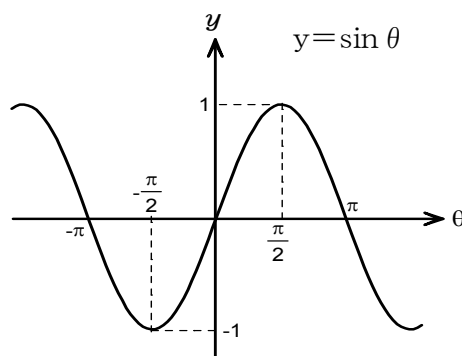
○基本形

1° $y = \sin \theta \cdots \textcircled{1}$

振幅 1 の奇関数である。周期 2π

($\sin(-\theta) = -\sin \theta$)

グラフは左右に無限までのびた波である。



左に $\pi/2$ だけ平行移動すると

$y = \cos \theta$ のグラフとなる。

2° $y = \sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$

3° $y = \cos \theta \cdots \textcircled{2}$

振幅 1 の偶関数 周期 2π

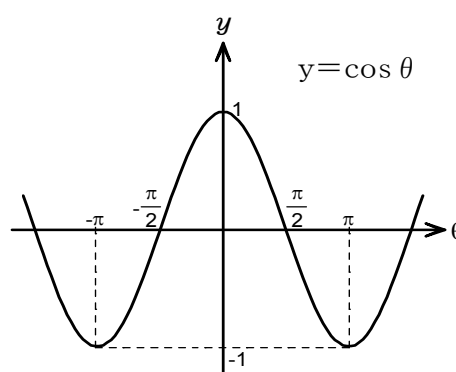
($\cos(-\theta) = \cos \theta$)

① ② を見てもわかるように \cos も \sin も位相が $\pi/2$ ずれただけの同じ関数なのである。(θ 軸方向のずれを位相という)

これらを統一して呼ぶとき **サインカーブ** (正弦波) という。

$y = \sin(\theta - \phi)$ は ϕ (位相) だけ右にずれたサインカーブ(波動)である。

ϕ を増やしていけば この波は どんどん右に進む。



4°

$y = \sin(\theta - vt)$ t は時間

と書くと これは、速度 v で右方向に伝播していく波を表す。

位相が $\pi/2$ の**倍数**だけずれたものは、 \sin か \cos のどちらか、あるいはその山と谷が逆転した形($-\sin \theta$ $-\cos \theta$)になる。

この事実が、「三角関数から円関数へ」でとりあつかった **軸周りの公式群**をあたえる。

サインとコサインをある割合で合成すれば

5° $y = a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \theta \cdots \textcircled{3}$

いろんな位相や振幅をもった 周期 2π のすべての正弦波をつくることができる。

これは、重要である。普通合成公式の形で

6°

$a \cdot \sin \theta + b \cdot \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha) \cdots \textcircled{4}$

ここで $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\cos \alpha = \frac{a}{r}$ $\sin \alpha = \frac{b}{r}$

とかかれる。

なんだかいかめしい公式に見えるが 右辺を 加法定理によって展開してみると

なんとということはない式であることがわかる。 α に対する条件は

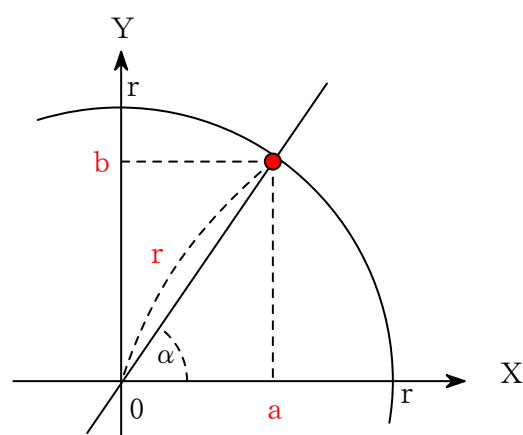
$\tan \alpha = \frac{b}{a}$ と書けばわかりやすい。 振幅の条件は $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ の式からすぐ解る。

a, b は 半径 r の円上の点であればなんでもよい。

それでは④式、すなわち、振幅 r 位相が左に α だけずれた 正弦波を作るにはどのような割合で \sin と \cos を混ぜたらよいであろう。

7°

まず 半径 r の円をコンパスで描く。
 つぎに $\tan \alpha = b/a$ より X軸との間の角が α になる直線を引いてやれば、その交点が a b を定める。こうして好きな振幅と位相をもった正弦波を $\sin \theta$ と $\cos \theta$ から合成できるのである。(逆に一つの正弦波を $\sin \theta$ と $\cos \theta$ に分解していると見こともできる。)



これらの公式は \sin と \cos だけでなく

位相のずれた任意の二つの波の合成まで一般化することができる。

オーケストラの演奏で各奏者がわずかにずれたタイミングで音をだしても、その合成された音は同一周波数の一つの音として聞こえることが、保証されるのである。

○ 加法定理

公式 6° は実は 加法定理から導かれるのである。 加法定理

8°

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \dots \textcircled{3}$$

—の場合は
全部符号を
かえるだけ

は、三角関数の中で最も重要な定理であろう。詳しい証明は、「三角関数から円関数へ②」で与えるつもりである。ここでは、グラフの立場から、5° の「任意の正弦波は \sin と \cos の線形結合(一次結合とも言う。5° の形のこと)に分解される」という仮定が真であるとして取り扱ってみよう。(証明) 5° が真であるとすると

$$\sin(\alpha + \beta) = a \sin \alpha + b \cos \alpha \quad \dots \textcircled{4}$$

と表されるはずである。ここで $\alpha = 0$ とおくと $\sin \alpha = 0$ $\cos \alpha = 1$ であるから

$$\sin \beta = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b \quad \text{よって } b = \sin \beta$$

また $\alpha = \pi/2$ とおくと $\sin(\pi/2 + \beta) = \cos \beta$ $\sin \alpha = 1$ $\cos \alpha = 0$ であるから ④は

$$\sin(\pi/2 + \beta) = \cos \beta = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a \quad \text{よって } a = \cos \beta$$

以上より ④式は

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \quad \alpha, \beta \text{ の順に並べて}$$

加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{をうる。}$$

cosについての様々な公式は 2° により sinの公式より導かれる

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha + \beta + \pi/2) = \sin(\alpha + \pi/2)\cos\beta + \cos(\alpha + \pi/2)\sin\beta \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \dots\textcircled{2} \quad (*)\end{aligned}$$

sin と cos についての公式がわかれば tan についてはすぐに導ける。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \quad \text{分子子を}\cos\alpha\cos\beta\text{で割ると}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \quad \dots\textcircled{3}\text{をうる。}\end{aligned}$$

このように すべての三角関数の公式は

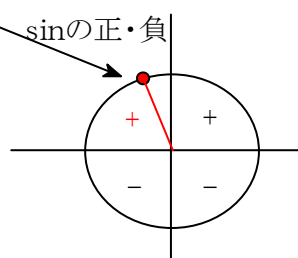
9° sin(またはcos)についての公式が得られれば後は自動的に導くことができる。

(*)ここで頻繁に $\pi/2$ まわりの変換公式($\sin(\theta + \pi/2) = \cos\theta$ など)を使用しているが

10° 簡便な覚え方 つまり θ を小さな角とした時 $\theta + \pi/2$ は第2象限 になるから 2象限における sin の符号は +

また $0, 2\pi$ では sin cosはかわらないが、
 $\pi/2, 3\pi/2$ では $\sin \leftrightarrow \cos$ と変わる
を使うと便利である。

詳細については、「三角比から円関数へ」を参照されたい



○2倍角の公式

$$y = \sin 2\theta \quad \dots\textcircled{1}$$

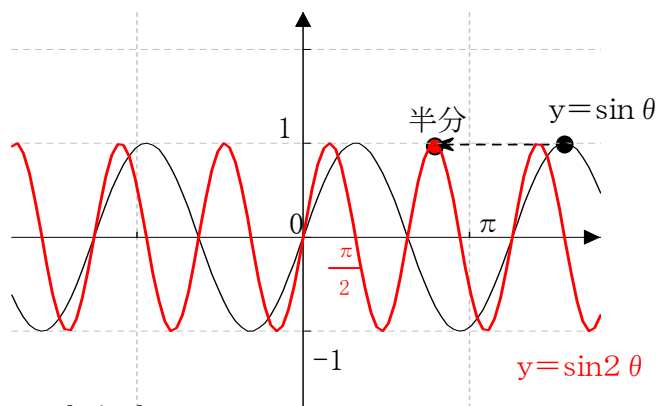
は右のように $y = \sin\theta$ のグラフを
横方向に 半分に縮小したものである
当然 周期は 半分の π になる。
つまり、高さは変わらず、波長が半分
の波になる。

公式は加法定理で

$\alpha = \beta = \theta$ とおけばよい。

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin(\theta + \theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos\theta \quad \dots\textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \dots\textcircled{3}$$



$$\tan 2\theta = \tan(\theta + \theta) = \frac{\tan \theta + \tan \theta}{1 - \tan \theta \tan \theta} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \dots \textcircled{4}$$

cosについての2倍角の公式は次のようにも変形される

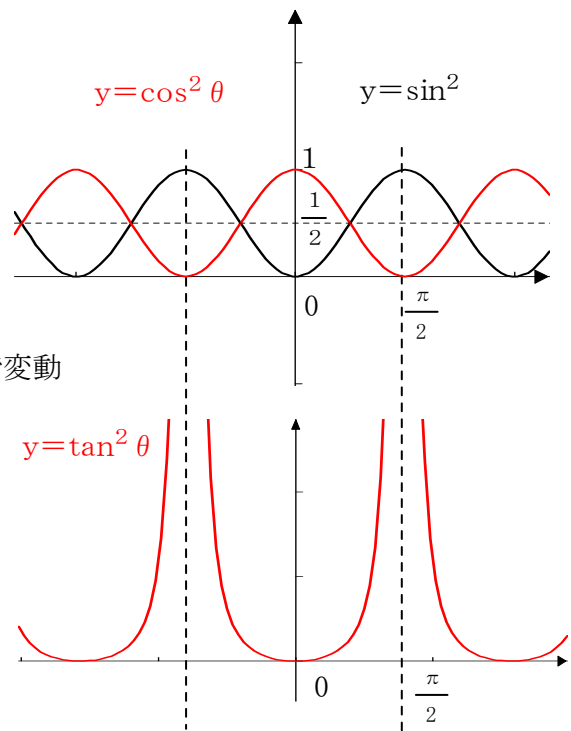
$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2\sin^2 \theta \\ &= 1 - 2\sin^2 \theta \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\cos^2 \theta - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 2\cos^2 \theta - 1 \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

この変形された2式⑤⑥は次のような 2乗に関する公式を生み出す

11°

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \dots \textcircled{5}' \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \dots \textcircled{6}' \\ \tan^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$



右図のように $\sin^2 \theta$ も $\cos^2 \theta$ も
上に $1/2$ あがり 直線 $y = 1/2$ の周りで変動
する振幅 $1/2$ 、半波長の波になる。
 $\tan^2 \theta$ はどうなるだろう。
上のグラフより合成してみるとよい。
周期 π の正の無限大まで発散する
関数となっている。

通常 11° のグラフは θ を半分にした形で
半角の公式として下のように整理されるが、11° のままのほうが使いやすい気がする。

2つの公式をまとめておく

2倍角の公式

12°

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2\sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \end{aligned}$$

半角の公式

13°

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ \tan^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \end{aligned}$$

○和・積の公式

ここまでは、同じ周波数の波の合成をあつかった。

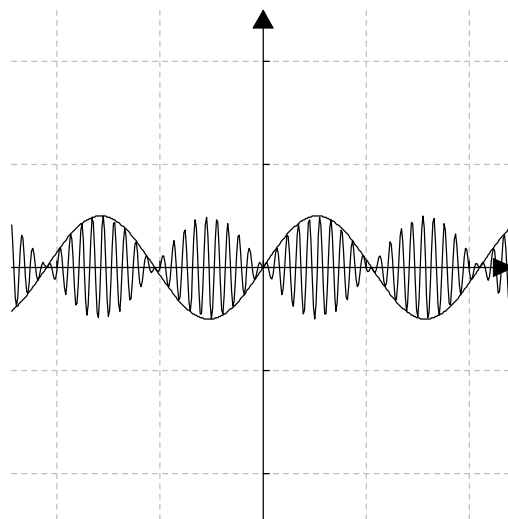
ここで、違う周波数の波を合成してみよう。

同じ振幅で異なる周波数の波を合成してみよう。

基本は $\sin A$ と $\sin B$ の合成である。

$$14^\circ \quad \sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

うなりの公式



合成波は右のように二つの周波数の平均で振動しながら、第2項によってその周波数の差に相当するゆるやかな振幅の変化を引き起こす。

よく小学校などで、笛で同じ音を出すとワンワンという「うなり」を起こす現象が見られるが、これがそうである。

ギターなどのチューニングのときに、便利に利用できる。すなわちうなりの回数だけ音が違っていることになる。(\cos の周波数は $(A-B)/2$ であるが、うなりの回数は上のグラフを見ても解るようにその2倍おこる)

公式 14° で $\frac{A+B}{2} = \alpha$, $\frac{A-B}{2} = \beta$ と置き換えれば

$A = \alpha + \beta$ $B = \alpha - \beta$ と書けるから ①式は $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta$ 整理して

積・和の公式

$$15^\circ \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \quad \dots \textcircled{2}$$

をうる。二つの周波数の波の積は その和と差の周波数をもつ2つの波に分解することができることを示している。

②式は ①式の変数を書き換えただけなので、本質的にはかわらない。

この式で α を高周波(伝送波) β を低周波(音声波)とすると ② の左辺は ラジオの AM 放送の波形を表す。 上のグラフでわかるとおり、伝送波の強度(Amplitude)を音声によって変化させ、電波で送信する。それを受信し、音声成分をとりだして再生するのが AM放送の仕組みである。状態によって電波の強弱は変化しやすいので、ノイズをひろいやすい。高音質の放送にはむいていない。それゆえ、電波の強弱ではなく、ノイズの影響をうけにくい、周波数を変化させた電波をつかって放送をおこなうのが FM(Frequency Modulation) 放送であり、音楽番組などに使用される。

和・積の公式も 積・和の公式も 証明は加法定理によりかんたんにできる。

②を証明しておこう

(証明)

加法定理より $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

これを辺々加えて $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cos\beta$

2で割って 左右をいれかえると 積・和の公式をうる。(証明終わり)

この定理の証明は、このような形式的なものでなく、もうすこし視覚的におもしろいものがあるが、それは「三角比から円関数へ②」に譲ろう。

積・和の公式 16° 「進行波の合成公式」

和・積の公式 17° 「うなりの公式」

16°
17°

$$\begin{aligned} \sin\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\} \\ \cos\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\} \\ \cos\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\} \\ \sin\alpha \sin\beta &= -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

左右どちらかを しっかり覚えておけばよい。

4本の公式は本質的におなじものである。

最初の式より $\cos\theta = \sin(\theta + \pi/2)$ などを持ちいて導くことができる。しかしながら公式はスピードが命なので、覚え込んだほうがいだろう。

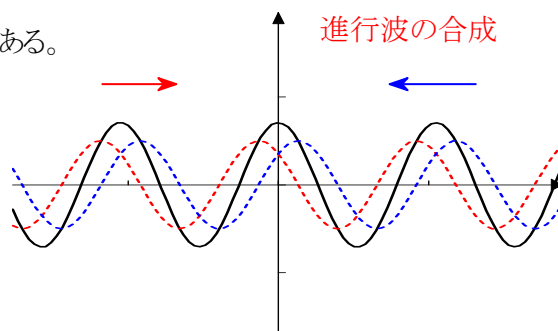
和・積の公式では 異種組み合わせが用意されていないが 次のようにして適用はできる。

$$\begin{aligned} \cos A + \sin B &= \sin(A + \pi/2) + \sin B \\ &= 2 \cdot \sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となり、結果は同じだが、45° の位相のずれをひき起こす。

記憶のためのポイントは 16° もしくは 17° の最初の式をしっかりイメージして定着させることである。17° のほうは、すでに「うなりの公式」として述べたが、16° の最初の式はどのような現象を現わしていると考えれば良いであろう。βを定数として固定してみると解る。右辺の二項は $y = \sin\alpha$ の波を 左右に β だけ動かしたものである。

このように 左右に等距離だけずれた同じ形の波を合成すると、そのちょうど真ん中に同じ形の波ができ、その振幅が $\cos\beta$ によって変化するだけである。岩壁のそばでは、進行する波と反射する波が合成されて、波は、ただ上下に動いているのが分かる。



○タンジェントのグラフ

$$y = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \dots \textcircled{1}$$

周期 π の連続関数であるが $\pi/2$ の奇数倍のところに不連続点がある。

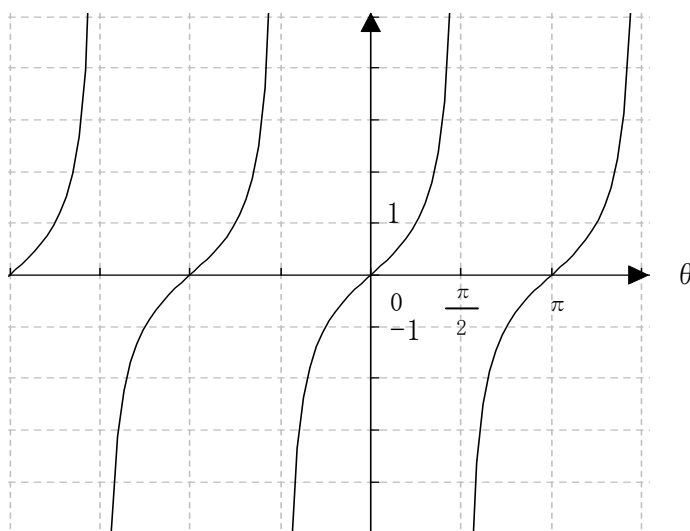
y の値(値域)が $-\infty$ から $+\infty$ までであるところが大きな特徴である。

それゆえ、正負のおおきな変動をおこなうパラメータを $\tan \theta$ で

置き換えることがよくある。数IIIなどで、 $-\infty$ から $+\infty$ までの積分計算を行うときなど、 $\tan \theta$ におきかえれば $-\pi/2$ から $\pi/2$ までの積分ですむので重宝がられている。そもそも、連続関数の役割はこの変数変換のためにあるといっても過言ではない。

次で取り扱う 指数・対数関数などはその典型である。

$\log X$ などという関数を毛嫌いするむきがあるが、この関数は X の値をより人間にわかりやすい数値に引きなおしてくれるありがたい関数である。嫌だというとバチがあたるというものである。



(補足)

今までも位相という言葉を使ってきた。

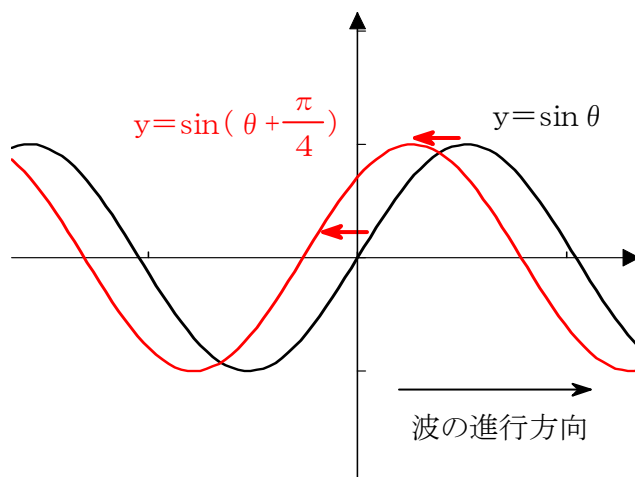
$$y = \sin(\theta + \phi) \dots \textcircled{1}$$

とかくとき θ を変数とし、 ϕ を θ を変化させる因数とみなすとき、 ϕ を位相という。ここまでは、何の問題もないのだが、この位相の「ずれ」を問題とするとき、人により書物によりまちまちの表現をすることがある。つまり「進む」「遅れる」という用語をつかう

時におこる混乱である。例えば $\phi = \pi/4$ とするときに

$$y = \sin(\theta + \pi/4)$$

の状態を、位相が $\pi/4$ だけ「進む」と表現するか「遅れる」と表現するかである。普通に考えると θ が $\pi/4$ だけ増えるのであるから、「進む」とするのが自然であるように思えるが、これをグラフに描いてみると、「反変的に変化する」法則によりグラフは左方向にずれる。波の進行方向を右と考えると「 $\pi/4$ だけ位相は遅れる」と表現したほうが妥当である。進む・遅れるという言葉をどちらの意味で使っているか、読者のほうで「目を良く澄まして」見極めることが大事である。



8) 指数関数と対数関数

「数の話」でふれたが、「数」は「足し算」と「掛算」の二つの演算をもつ珍しい概念である。「数の大きさ」でも、「足し算的大きさ」と「掛算的大きさ」の二つがある。これを混同するといろいろと不都合がおこる。例えば日常生活のなかで、「小さく小さくしていくと……」という言葉を使ったとき、読者はどのようなイメージを持つであろうか。数直線の上で「0を超えて、負の方向にどんどん進んでいく」と考えるであろうか、それとも「正の範囲で 0 に限りなく近づいていく」ことをイメージするであろうか。

日常の生活のなかでは「小さい」という言葉は後者の掛算的な大きさを意味することがおおい。数学では、数の大小関は足し算的意味をとることが多いが、極限を扱う「解析学」の領域になると、突然説明もなく掛算の意味で使ったりする。節操がないのである。

人は、もともと負の概念はもっていなかったし、生活の上でも加算的な比較より「比」による比較にたよっていることが多い。「私はあなたの10倍も好きよ」とか、「おれの半分もできないのか」とか「100倍のそのまた100倍も遠い所に」とか、「桁が違うよ」とか…… 何倍かということで比較することが多い。（「6つも年上よ」などと加算的な比較も当然おこなうが。）

数列の言葉を用いると 前者は「等差数列」的であり後者は「等比数列(幾何数列)」的であるともいえるであろう。人間の感覚も、実は等比数列的である。目や耳などの感覚器官は実によくできていて、たいていの機械の性能をこえる。それは、遠くが見えるとか小さな音が聞こえるとかいう問題ではなく、レンジの問題である。ほとんど自動的にピンがおちる音から大砲の音までカバーする。夜明けの薄明かりから、真夏の海岸でのきらめく砂浜の風景まで何の苦もなく見ることができる。昼間には、全く気にしなかったチクタクという目覚ましの音が、夜中には異様に大きく聞こえるのも同じことである。

人にとって、大きい・小さいという概念は絶対的なものではなく、あくまで相対的なものである。音楽をやっているとき $p \rightarrow mp \rightarrow mf \rightarrow f \rightarrow ff$ と音を大きくしていくときに、最初に大きくした分量と同じエネルギー分だけ音量をましていってもほとんどクレッシエンドに聞こえない。pからmpへはほんのわずかの努力で可能であるが、それを mf にするときは、その4倍、f にするときは 8倍と等比数列的に力を加えなければならない。(音楽の初心者が表現力が弱いのは、このことを体で理解していないからであることが多い)

例えば、地震の強度を測るのに「マグニチュード」という尺度がある。ランクが1 上がるのに 30倍のエネルギーを必要とする。であるから、プレートにマグニチュード7 の地震を引き起こすエネルギーがたまっていた場合、その同量のエネルギーをマグニチュード6の地震で放出するには、30回、マグニチュード5の地震なら $30 \times 30 = 900$ 回の地震が必要になる。

この掛算の単位となる 30 という数を 底 というが、人間の感覚にあわせる場合、これをいくつにとれば実際の感覚によく合うかを実験的に決めている。

例えば 底を 5 とした場合「実際のエネルギーが、 $5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ 倍になるときに感覚的には 2倍 3倍 4倍…… と感じられる」などとするのである。

とくに 10 を底 とする場合 簡便に「桁」という言葉で表現することが多い。「年間所得が7桁では、ちょっとね。やっぱり8桁なくては、セレブとは……」などという。この場合 8桁は1000万円を超えることである。 $10,000,000 = 10^7$ であるから、10を底とする指数(肩の数)に+1

したものが、「桁」になる。

○指数関数

この掛算的大きさを示すものが、指数関数である。また、実際の分量を掛算的大きさの指標で評価するものが、指数関数の逆算数「対数関数」である。

$$y = a^x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

をaを「底」とした指数関数という。

底について考えてみよう。底とは一種の単位である。足し算の世界では、中心になるのは、「0」である。数直線の右側の好きなところに、1個の点を打つ。この場所が、「単位」とよばれる「1」と表示される。単位のところはどこでもよい。ただし一度決めたら、動かさない。国によって、この大きさは cm であつたり インチであつたり 寸 であつたりまちまちである。

単位が決まったら、数の足し算的大きさは この 単位を「足していって」いくつ分あるかで調べる。そうして 12cm とか 3インチとか言うのである。小ささを計るには、0より左に単位でいくつ分行くかというこで表現する。 -5°C などと $-$ の記号を使う。

掛算的大きさの場合、中心になるのは「1」である。この1の右側の好きな所に点をひとつ取る。ここが「底」と呼ばれ、掛算的大きさを測る場合の「単位」の役割をはたす。足し算の場合、「単位を何回足して、目的地に到達したか？」で大きさをはかったが、掛算的大きさの場合、「底を何回 **掛算して** 目的の場所に到達するかで、大きさをはかる」たとえば、625は 5を底とする大きさの測りかたでいうと、 $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$ なのでかけ算的大きさは「4」である。

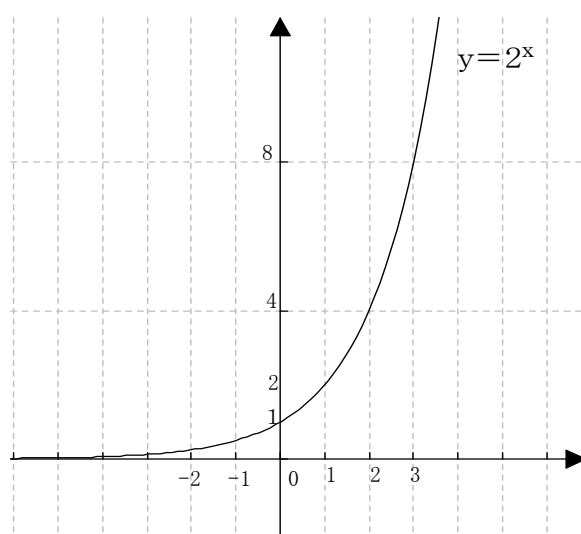
小ささの表現では、5で**何回割り算したか**で決める。たとえば $0.04 = \frac{1}{25} = 5^{-2}$ なので、掛算的小さの度合は -2 である。

a^n (nは整数) の形の数は すぐに計算できるので、なんの困難もない。ところが、「連続関数」とするためには、あらゆる「実数値」について

a^x を計算できなければならない。これはなかなか厄介で数学者をさんざん悩ました
例えば、 $y = 2^{\pi}$ はいったいどのような数であるか。

ただしこのようなことは、それで飯を食っている専門の数学者にまかせて、われわれは、nが整数の時にとる値を座標平面上にプロットしてその点を滑らかに結んで、「グラフができた」ととぼけておけば良いのである。

(それであっていることは、専門の学者が証明してくれている)



指数関数のグラフ

このようにして、われわれは $2^{1.8}$ も $2^{\sqrt{3}}$ も何もかも、一気に計算できるとする立場に到達した。
 (ほんとうは、こんなに簡単に到達してもらっては困る)

困ると言われても、気にしないで先にいこう。

指数関数 $y = 2^x \cdots \textcircled{1}$ は

前のページのグラフのように、定義域 $-\infty < x < +\infty$

値域 $y > 0$ であるような連続関数である。

(連続ということがうれしい。)

一般に a を正の数として

$$y = a^x \cdots \textcircled{2}$$

のグラフも同様にかけるがそのグラフは右のようになる。

$x=1$ のとき $y=a^1=a$ なので必ず

$(1, a)$ を通る。また $x=0$ では

$$a^0=1$$

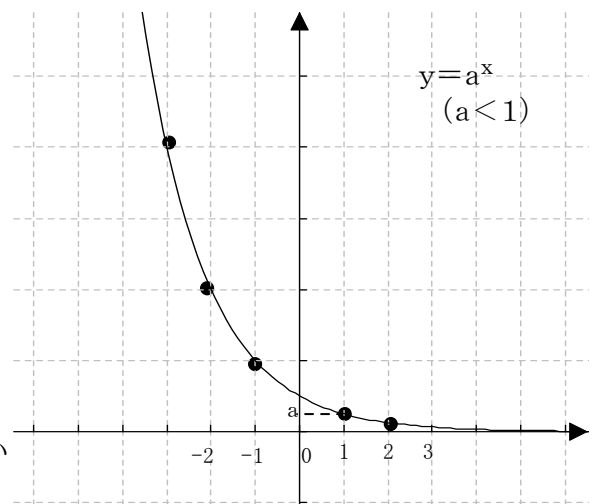
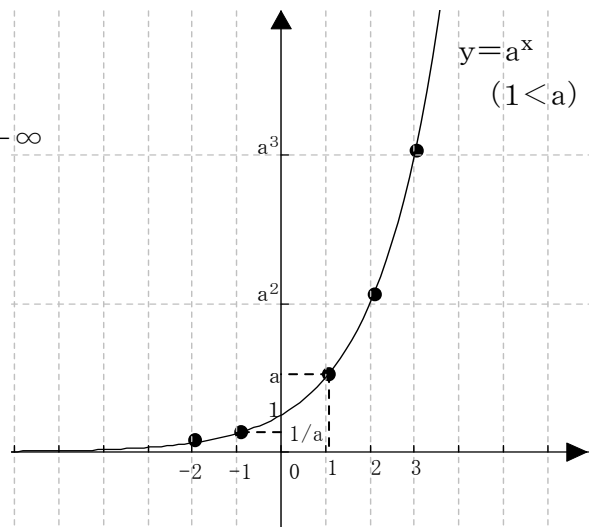
なので $(0, 1)$ も通る。

この2つを作図の手がかりとして、過去何人もの数学者をノイローゼにして葬り去ったこの指数関数のグラフを何食わぬ顔でさっと書けばよい。

a^x の値が負になることはない。また、底 a が負であれば、 x が整数値の場合だけでも計算値が $+$ $-$ と飛び散るので $a > 0$ と制約する。

a が 1より小さいときは掛算するほど小さくなるから、グラフも右のとおりである。

$a=1$ の場合 a^x は常に 1 になってつまらないから、これも除外することになっている。



底の条件 $0 < a$ ただし $a \neq 1$

さて、このグラフがかけると「何が嬉しいのか」を明確にしておく必要がある。

まずは、すべての x の値について、このグラフより a^x を求めることができること。

さらに、 x の大小関係と a^x の大小関係は同じ ($a < 1$ の時は逆) であるから、

一方の数での大小判定は他方の数での大小判定と同じであることである。

これによって、先ほどのマグニチュードや光の強度など、 x 軸上の数値に関しては人間の感覚にそった強度を、 y 軸上の数値はエネルギーなど実際の自然量的な数値を対応させることができるのである。

この便利は、次の指数関数の逆関数である「対数関数」において、著しい。なお、この対応

の基準になるのは、底の数値であるが、人間の指(ゆび)数の関係で10が良く使用される。

そのほかに $e=2.71828\cdots$ という数値が大変便利ということがわかっている。
 なぜ便利かということは、微積分を勉強してからわかるが「自然対数の底」という
 名前までついているくらいだから、きっと便利にちがいない。

指数関数に関する公式は 列挙しておく。 x が整数のときのイメージで覚えればよいだけで
 ある。(このあたり、実数値に焼きなおす作業にどれだけの労力をつぎ込んだと思っているんだ〜 と
 いう数学者の叫び声がまた聞こえるようだ。無視、無視……)

掛算が a の肩の上の世界では 足し算になるところなど注意してみしてほしい。
 a を正の数($\neq 1$) m, n を実数とするとき

(1) $a^0=1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
 (2) m, n を整数とするときには $a^m = \sqrt[n]{a^m}$

(3) **指数法則**

$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$a^n \div a^m = a^{n-m}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$
$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$	

がなりたつ。

○対数関数

対数関数は指数関数の逆関数である。その働きは 指数関数のグラフにおける y 値 すなわち
 一般の加法的数値を、 a を底とした乗法的数値に引きなおす働きをする。

やさしく言うと「人の感覚に合う数値に直す」働きをする。

グラフは、基本的には 指数関数と同じであるが
 「逆関数」の宿命で x と y を書きなおす作業
 によって、 x 軸と y 軸をとりかえた格好になる。

グラフは横倒しになり

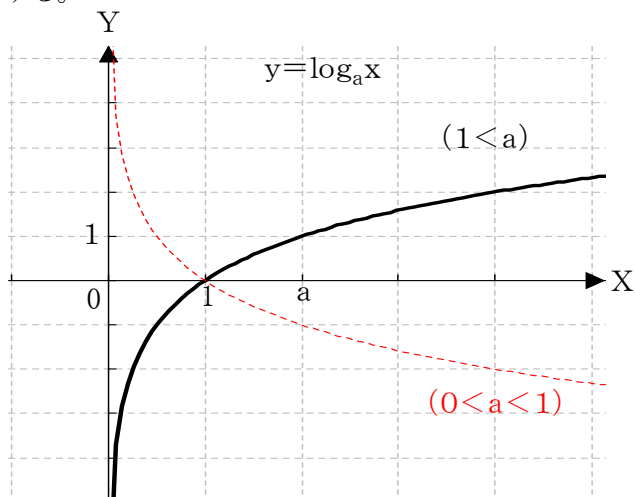
右のような形になる。

底 a の大小で 黒($1 < a$)と

赤($0 < a < 1$)にわかれるが、この二つの
 グラフが、指数関数の対応するグラフを 90°
 たおしたものとわかるだろうか。前に注意
 したとおり、 45° の直線で折り返したグラフと

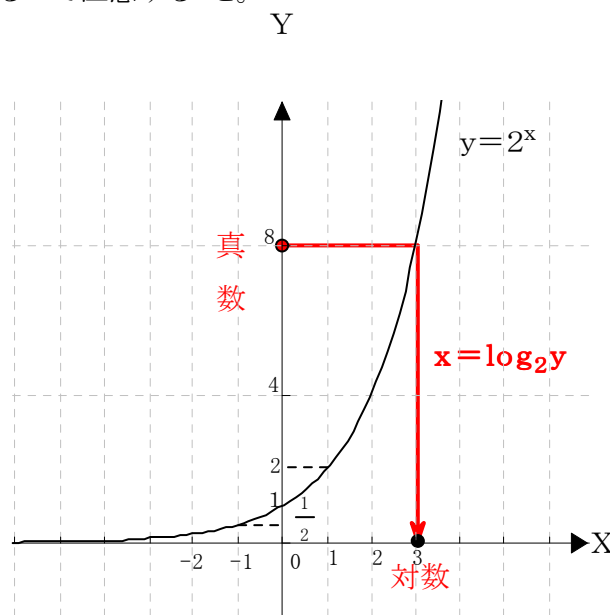
いうよりも、ノートを横にして、 X, Y 軸の方向によく注意して、指数関数の形を書きなおしたほうが
 まちがいが少ない。対数関数の特徴は

x はつねに正であるから 定義域 ($0 < x$) 値域は $-\infty < y < \infty$ ($1 < a$) のときは緩やかに増加する連続関数で、作図の基準点は $(1, 0)$ と $(a, 1)$ また 底 $a > 0$ $a \neq 1$ である。



指数関数、対数関数に対する、平行移動・拡大などの変換は普通におこなわれる。
 ただし、定義域・値域・漸近線などの同様の変換をうけるので注意すること。

ここでは、対数関数の性質を見ていくことにしよう。
 ただし、指数関数と対数関数は本質的に同じなので
 指数関数のグラフを使いながら説明する。
 対数関数に対する記述は、このグラフの
 Y軸方向を変数(定義域) X軸方向を関数(値域)
 と思って考えてほしい。



分かりやすくするために、底を2 とする指数関数
 を使用する。

指数関数は $y=2^x \dots ①$
 によって、 x の値から y の値を計算する。
 逆に 対数関数は y の 値から x の値を
 逆算するのがその使命である。 逆関数を求めるには通常

①を $x=$ の形に変形する作業
 が必要であるが、ここでは 代数関数ではないので、「逆に解く」という変形自体が不可能で
 ある。(逆に解くという計算がいらぬということで、ラッキーである。)

指数関数が $y=\exp_2(x) \dots (\equiv 2^x \text{の意味})$

などと $f(x)$ の形で与えられていれば「逆関数は $f^{-1}(x)$ で表す。」という通常の規則を適用して

$$\text{対数関数 } x = \exp_2^{-1}(y)$$

などと書くところであるが、残念なことに 2^x などの形をしてはこの記法は使えない。

そこで新しく 対数(logarithm)の略号をつかって

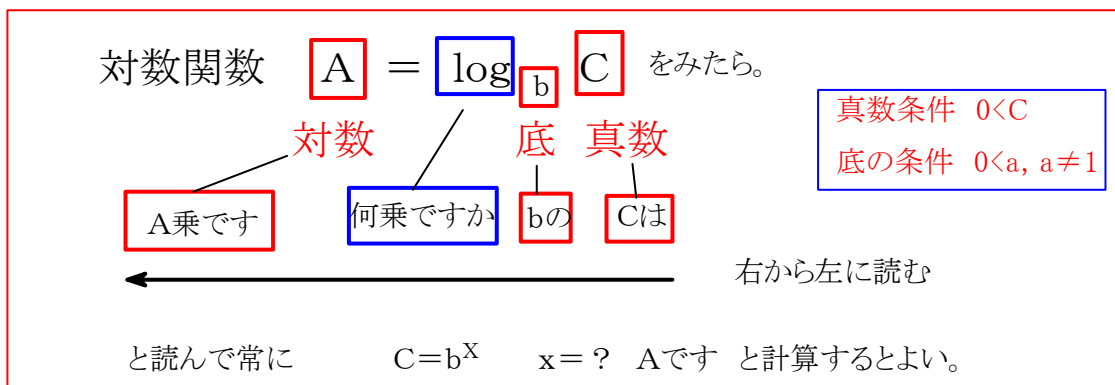
$$x = \log_2 y \dots \dots ② \quad (\text{一般的に書くと } y = \log_a x \dots \dots ②')$$

と書くことにする。底を \log のそばに底が小さくかいていることに注意。

上のグラフをみると 縦軸の 8 には 横軸の 3が
 4 には 2が
 2 には 1が
 1 には 0が
 1/2 には -1が ...

2の何乗か? で計算

対応している。縦軸の数値がエネルギーなどの実測値(足し算的数値)をあらわすとすると、対応する
 横軸上の数値は、それが底を何回掛け合わせて作られる数であるか(上では 2の何乗か)を表す
 掛算的大きさの数値である。ことばを変えると、人間の感覚的レベルをあらわす数値である。
 そこで、縦軸の数値を **本当の実測値** の意味で「**真数**」と 横軸の数値を **対応するレベルを表す
 数値**という意味で「**対数**」と呼ぶ。「対数関数」という名前も、ここから来た。



真数の \log をとることによって計算される 対数は 数の乗法的大きさのレベルを与え
 それゆえ、いろいろな場面での感覚的レベルの指標や、実験的結果の指標としての
 大変有用な数値を与えることをもう一度強調しておく。

ここで、真数や対数にたいして、足し算の数とか 乗法的数とかいろいろ曖昧な言葉を使った
 が、今後は **真数・・・(加算的大きさの数) 対数・・・(乗算的大きさの数)**
 という言葉に統一することにしよう。

全ページのグラフを見ると。真数における掛算(たとえば $2 \times 4 = 8$)は、y軸上で 普通の
 掛算の位置関係を保っているが、対応する 対数軸(x軸)上の数値は 順に

1 2 3 となって その点の位置関係は $1+2=3$ となっている。

並べて書くと

真数 $2 \times 4 = 8$

対数 $1 + 2 = 4$

他のいろいろな数の組み合わせにおいても調べても 同じ関係がなりたっている。

これは一般化した形で言うと

真数の世界での 乗法($\times \div$) は 対数世界での 加法($+$) に対応する

という著しい事実を示している。

数値が整数だけなら

$$2^1 \times 2^2 = 2^{1+2} = 2^3$$

という 現実の掛け算は「肩の上の世界」では 足し算になる。 という良く知っている
 法則を表しているだけなのだが、指数関数(対数関数)を実数全体にわたる連続関数と
 して確立してくれた数学者のおかげで

「すべての実数に関して」この関係がなりたつ。 ということになった。

この事実は、**乗法を加法によって計算する方法**を与える。

例えば $A \times B$ を計算するのに、対数目盛をつけた二つの定規を用意し、それぞれの数値
 に対応する点に印をつける。 定規をずらして、AとBの印の和にあたる距離に印をつけ、その
 数値を対数目盛で読むと その値が $A \times B$ の答となる。

この機器は「計算尺」とよばれ、電卓のない時代の工学屋さん必携の道具であった。

真数の世界での問題を 対数の世界に移し替え そこでの簡単な計算で答えをみつけ
 るという方法は他にもいろいろな場面で利用されている。

○対数関数の公式

対数関数の公式を列挙しよう。対数の世界では真数のかけ算が足し算
わり算が引き算にかわることを注意してながめてほしい。

a は底で $a > 0$ ($a \neq 1$)

M, N は 真数でいづれも正とする。

$$(1) \log_a a = 1 \quad (a = a^1) \quad \log_a 1 = 0 \quad (1 = a^0)$$

$$(2) \log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (\text{真数のかけ算は対数の足し算})$$

$$(3) \log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M \quad (\text{真数のわり算は対数の引き算})$$

$$(4) \log_a M^p = p \log_a M \quad (\text{真数で} M \text{を} p \text{回かけ算すると対数では} p \text{回足し算})$$

$$(5) \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (\text{底の変換公式 後でふれる})$$

$$(6) a^{\log_a M} = M \quad \log_a a^p = p \quad (\text{逆関数の逆関数はもとにもどる})$$

(5)については説明が必要であろう。(5)の公式は次のような意味合いをもつ

真数を M を a を底としてはかったもの $\log_a M$ と

b を底としてはかったもの $\log_b M$ は

異なる値になる。つまり $\log_b M \neq \log_a M$ であるが、そのちがいは

$$\log_b M = \log_b a \cdot \log_a M \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。つまり、2者の違いは $\log_b a$ 倍であるということを表している。

(証明) $M = a^p = b^q$ とする、また a を b の指数で表示して $a = b^k$ とかくと。

$$a^p = (b^k)^p = b^{kp} = b^q$$

真数(肩)の部分と比較すると

$$q = kp$$

それぞれを対数であらわすと $q = \log_b M$ $k = \log_b a$ $p = \log_a M$ であるから

$$\log_b M = \log_b a \cdot \log_a M \quad \cdots \textcircled{1} \text{ をうる。} \quad (\text{証明終わり})$$

(5)の2番目の公式は 最初の式で $M = b$ とおくとすぐ出る。

$\log_b a$ と $\log_a b$ の関係が逆数関係となっているのもおもしろい。

○対数関数がもたらすもの

いままで、指数関数のグラフの形で考察してきたが、普通に使用される X-Y軸の関係にもどして

$$y = \log_a x \dots \textcircled{1}$$

のグラフで考えることにしよう。この場合 真数は横軸 対数は縦軸で測られる。

一般的に大きな数を扱うことが多いので、対数関数の底 a も 1より大きい数値を使用することが多い。 a > 1 の場合について対数関数のグラフの性質をしらべて見よう。

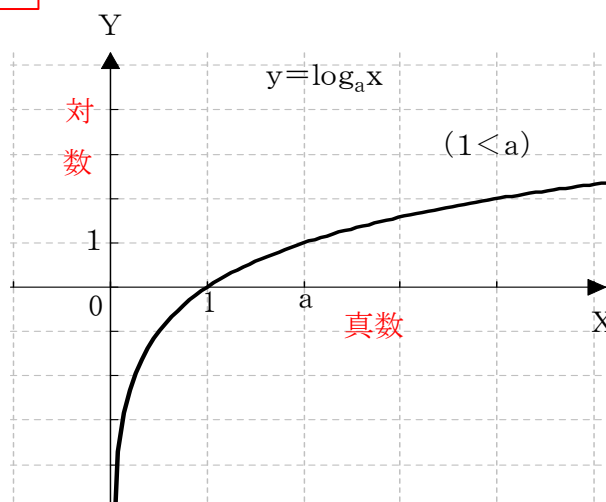
この場合グラフは右のようになる。

グラフの特徴は

○グラフは 連続で非常にシンプルであた、滑らかに増加を続けている。

これは、真数の振る舞いを 対数の振る舞いに直す場合に非常にありがたい次のような性質もっている。

- (1) 関数の定義域の中で、真数と対数は1対1に完全に対応している
- (2) しかも、真数と大小と、対数の大小関係は同じである。
- (3) 非常に大きなレンジの真数の範囲を、狭い範囲の対数で表現できる。
- (4) 真数の乗法は対数ではより簡単な加法の演算に引き直される。



これらの性質より、真数上での数学的問題は、ほとんどが対数上での問題に書き換えることができる。そこで 乗算が加算にかわることを利用していろいろと便利な計算ができるのである。

前述のとおり、1より大きい対数の底では 10 が良く使われる。底が10である対数を「常用対数」とよび 通常 底の 10 を省略して

$$\log_{10} x = \log x$$

と書いて良いことになっている。解析学(微積分学)の分野では、ある理由で

$$e = 2.71828 \dots$$

という無理数を底とすることが多い。これを「自然対数」と呼ぶ。この場合も 底を省略して

$$\log_e x = \log x$$

と書いて良いことになっている。

どちらのつもりで書いてあるか、よく注意しよう。

(常用対数の例)

(3.14)²⁰ はおよそどれくらいの大きさになるか

解) 対数をとると $\log_{10} 3.14^{20} = 20 \log_{10} 3.14$

対数表より $\log_{10} 3.14 = 0.4969$ であるので

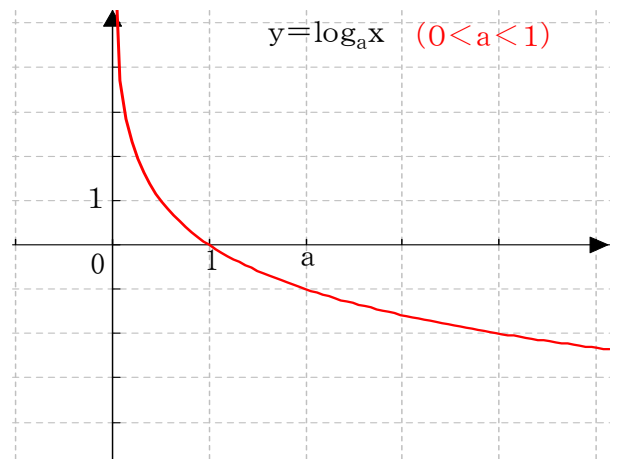
$20 \times 0.4969 = 9.938$ よって $3.14^{20} \doteq 10^{9.936} < 10^{10}$

これより $10^{10} = 10,000,000,000$ すなわち百億 (11桁) にすこし足りない 10桁の数であることがわかる。

○底が 1 より小さい場合

底が1より小さい場合は、グラフは右のように真数の大小と対数の大小関係が逆になるので注意が必要である。

真数が 0 に近づいていくにつれて対数値は大きくなっていく。よって 分子・原子レベルの非常に小さい数を評価する時に便利である。



(例 pH値)

酸性・アルカリ性を決めるのは、水溶液中の水素イオン濃度である。この水素イオン濃度を表すのに、化学の世界では mol/L という単位をつかう。1mol とは 分子(原子)が 6×10^{23} 個あつまった量であり 水素イオンの場合は 1mol は 丁度 1g である。化学の人は怒るかもしれないが、簡単なので「1リットル中に 何グラムの水素イオンが含まれているか」を水素イオン濃度としてしまおう。1mol すなわち1g も水素イオンが含まれていると 多すぎる。大量の H^+ がいろいろと悪さをするのである。

この水素イオン濃度を 1/10 を底とした対数値であらわしたものが「pH値」である

通常、純水の状態では水が電離して 10^{-7} g 程度の水素イオン H^+ が存在している。この状態を中性としよう。このときの pH 値は $\log_{1/10} 10^{-7} = 7$ である。

pH 2 は 10^{-2} すなわち 1/100 g も水素イオンが含まれている。強酸である。胃酸はこれに近いようだ。pH 8 は 10^{-8} グラム。純水よりも H^+ は少ない。そのぶんだけ OH^- イオンが増え、これが アルカリ性の性質をもたらすという。

pH と 10^{-n} g の対応関係は次のとおりで

pH	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
水素イオン濃度	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}

である。こちらの表現のほうがわかりやすいかも知れない。

常用対数 $\log_{10} X$ を使って出した数値の マイナス を取り去って pH の定義としている教科書もある。(もちろん同じことである)

どちらにせよ、pH値は 水素イオンの「少ない度合い」を表していると言って良い。

「動き回るグラフ達②-3」へ続く